This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Digitized by Google

JOHN G. WOLBACH LIBRARY
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY
60 GARDEN STREET
CAMBRIDGE, MASS. 02138

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DIE

ASTRONOMISCHE

STRAHLENBRECHUNG.

Digitized by Google

Digitized by Google

Int. Obs. 1863, Dec. 180. Bought of H. J. Parker 3s. 6d. Ent.

DIE

ASTRONOMISCHE

STRAHLENBRECHUNG

IN

IHRER HISTORISCHEN ENTWICKELUNG

DARGESTELLT

VON

DR. C. BRUHNS,

ASTRONOM DER NEUEN STERNWARTE UND PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG.

EINE GEKRÖNTE PREISSCHRIFT.

LEIPZIG,

VOIGT & GÜNTHER.

1861.

Digitized by Google

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen behalten sich der Verfasser und die Verlagshandlung vor.

Digitized by Google

VORWORT.

Der Beobachter der Gestirne befindet sich an der Oberfläche der Erde auf dem Grunde eines Luftmeeres, in welchem die Strahlen der leuchtenden Körper sich brechen, sodass sie unter einem andern Winkel in das Auge fallen, als es ohne die Luft der Fall sein würde. Dieser Strahlenbrechung oder Refraction wegen bedürfen die Beobachtungen der Astronomen einer Correction. Obwohl auch die Alten die Wirkungen der Refraction schon bemerkten, wurde doch die Berücksichtigung der Strahlenbrechung bei den Beobachtungen erst zum Bedürfniss, als man in der Beobachtungskunst soweit vorgeschritten war, um Minuten messen zu können. Seit dem 16. Jahrhundert wurde die Refraction ein eigener nothwendiger Abschnitt der practischen Astronomie und je mehr diese fortschritt, desto genauer musste auch die Refraction bestimmt werden, und seitdem die astronomischen Instrumente Secunden, ja Bruchtheile von Secunden zu messen erlaubten, konnte auch die Refraction bis auf die Bruchtheile von Secunden genau ermittelt werden.

Die practische Astronomie verlangt die genaue Kenntniss der Refraction; die Theorie derselben ist aber, weil sie Sätze aus der Mechanik über das Gleichgewicht der Gasarten benutzt, Aufgabe der physischen Astronomie. Der theoretischen Entwicklung der Refraction stellten sich anfangs besonders zwei Hindernisse entgegen. Das erste Hinderniss, welches in der Unkenntniss der Constitution der Atmosphäre liegt, d. h. in der Unkenntniss der Function, welche zwischen der brechenden Kraft der Atmosphäre und der Höhe in derselben stattfindet, hat zu Hypothesen über diese

Digitized by Google

Function und daher zu verschiedenen Theorien Anlass gegeben, aber welche Theorie die richtige sei, lässt sich eigentlich noch nicht entscheiden; doch sind die Resultate der neuesten Theorien für die Zenithdistanzen, bis zu welchen man gewöhnlich beobachtet, so wenig von einander verschieden, dass für die practische Astronomie die Theorien und mithin auch die Hypothesen genügen. Das andere Hinderniss ist seit Anfang dieses Jahrhunderts gänzlich beseitigt. Die Theorie der Refraction führte auf mathematische Ausdrücke, welche mit genügender Strenge zu lösen die früheren Mathematiker nicht vermochten; durch Auflösung einiger Integrale und durch geschickte Substitutionen hat die Mathematik den Entwickelungen seitdem einen Grad der Genauigkeit gegeben, welcher nichts zu wünschen übrig lässt.

Die Theorien der Refraction finden sich theils in eigenen Werken, theils in den Zeitschriften gelehrter Gesellschaften niedergelegt und der Astronom, der sich mit den verschiedenen Theorien bekannt machen will, hat oft Mühe die einzelnen Werke zu erlangen und es kostet ihn, wenn er sie erlangt hat, grossen Fleiss die schönen Theorien ganz und gar durchzuarbeiten. Nicht minder interessant ist die Geschichte der Refraction, welche zeigt, wie nach und nach diese Seite der Astronomie immer mehr vervollkommnet und nach vielen Irrungen selbst der grössten Astronomen und Mathematiker zu ihrem heutigen Standpuncte erhoben worden ist.

Als am 3. August 1854 die philosophische Facultät der Berliner Universität, an der ich damals meinen Studien oblag, als Preisaufgabe eine Darstellung der Refraction in ihrer historischen Entwicklung von ihrer Entdeckung an bis auf die Jetztzeit stellte, wurde ich auf diesen interessanten Zweig der Astronomie aufmerksam und wagte mich sehr bald daran, die Aufgabe zu bearbeiten. Ich behandelte die astronomische Refraction, konnte aber der Kürze der Zeit wegen die terrestrische nicht bearbeiten; dessen ungeachtet verdankte ich der nachsichtigen Beurtheilung der Professoren der Astronomie und Mathematik, dass meiner Arbeit der erste Preis zuerkannt wurde. Wegen anderer astronomischer Beschäftigungen konnte ich die Arbeit nicht gleich zum Druck befördern, ausserdem wollte ich noch eine Umarbeitung und Erweiterung derselben vornehmen, und als ich diese 1858 ausgeführt hatte, überreichte ich das Werk als Habilitationsschrift der philosophischen Facultät der

Digitized by Google

Berliner Universität. Kaum ein halbes Jahr an dieser habilitirt, erhielt ich einen Ruf an die Universität Leipzig, dem ich Ostern 1860 Folge leistete und jetzt erst wurde es mir möglich die Arbeit zum Druck zu befördern.

Das vorliegende Werk behandelt die astronomische Refraction und ist eingetheilt in zwei Abschnitte. Der erste Abschnitt enthält ganz besonders die Geschichte der Refraction von ihrer Entdeckung an bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts und zeigt, wie die Theorie der Strahlenbrechung immer mehr ausgebildet wurde. Der 2. Abschnitt beschäftigt sich mit den Arbeiten über Refraction, welche diesem Jahrhundert angehören: die schönen Theorien der Heroen der Wissenschaft sind gegeben, die Entwicklungen möglichst abgekürzt und vereinfacht und an einigen Stellen eigne kürzere Entwicklungen, als die Urheber gegeben, eingeführt. Besonders ist auf die Verschiedenheit der Theorien aufmerksam gemacht und am Schlusse die aus denselben folgende Constitution der Atmosphäre abgeleitet, sodass durch diese Uebersicht jeder Astronom sich leicht für diejenige Theorie entscheiden kann, welche er nach seiner Ueberzeugung oder nach Beobachtungen, die er an seinem Wohnorte angestellt hat, für die richtigste hält.

Die Litteratur über Refraction, welche mir in der Königlichen Bibliothek, in der Universitäts- und der Sternwartenbibliothek zu Berlin, in der Universitäts- und Sternwartenbibliothek zu Leipzig, sowie in einigen Privatbibliotheken zugänglich war, habe ich benutzt und bin, soweit es möglich war, auf die Originalquellen selbst zurückgegangen, sodass ich hoffe nichts Wesentliches vergessen oder überschlagen zu haben. Die von mir benutzte Litteratur füge ich hier hinzu.

Bei der Umarbeitung im Jahre 1858 stand mir auch noch die Bearbeitung derselben Preisaufgabe von Herrn Wackernagel in Berlin, welcher 1855 einen 2ten Preis für seine besonders historisch gehaltene Arbeit errungen hatte, zu Gebote und durch Vergleichung mit meiner Arbeit konnte ich einige historische Daten berichtigen und ergänzen. Herrn Wackernagel bin ich dadurch zu grossem Danke verpflichtet.

Die Geschichte und die Theorien der astronomischen Refraction umfassen im vorliegenden Werke fast 12 Druckbogen, es schien mir nöthig damit vorerst abzuschliessen und die Anwendung der gege-

Digitized by Google

benen Theorien d. h. die Tafeln und die Anwendung der Refraction auf Beobachtungen besonders zu geben. Ich gedenke noch nach den vorzüglichsten Theorien in diesem Werke mit gleichen Constanten Tafeln zu berechnen, die Correctionen für Luftdruck und Wärme unter Einer Form zu geben, die Tafeln dann durch Beispiele zu erläutern und überhaupt die einzelnen Aufgaben über Refraction, welche in der Astronomie verlangt werden, durchzugehen. Eine Behandlung der terrestrischen und der aussergewöhnlichen Refraction, ganz in demselben historischen Gange wie ich es hier mit der astronomischen Refraction versucht habe, würde alsdann den Schluss bilden und das Ganze ein Werk von etwa derselben Stärke wie das vorliegende geben. Manche Vorarbeiten habe ich schon gemacht und einzelne Theile sind bereits vollständig fertig, ich würde aber mit grösserm Fleisse und grösserer Zuversicht das angefangene Werk vollenden, wenn das hier Vorliegende bei Sachkennern und Fachgenossen eine günstige Aufnahme fände.

Leipzig, den 3. April 1861.

Dr. C. Bruhns.

Digitized by Google

VERZEICHNISS DER BENUTZTEN WERKE.

Cleomedes, Circularis inspectio meteorum. Basileae 1585.

Ptolemäus, Optik. (Nach dem Auszuge, den Delambre in seiner histoire de l'astronomie ancienne Tom. II. giebt.)

Sextus Empiricus, Adversus astrologos. Edit. Fabricii 1718. Lib. V, p. 351.

Alhazen, Opticae Alhazeni libri septem. Ejusdem de crepusculis. Optica Vitellionis. Omnes instaurati a Fr. Risnero. Basileae 1572. Fol.

Roger Baco, Specula mathematica. Francofurti 1614, pag. 37.

Walther, Delambre histoire de l'astronomie du moyen âge pag. 339, wo sich findet ein Auszug aus: Coeli et siderum in eo errantium observationes Hassiacae Principis Wilhelmi Hassiae Lantgravii auspiciis institutae. Et spicilegium biennale ex observationibus Bohemicis Tychonis Brahe. Nunc primum publicante W. Snellio. Quibus accesserunt Joannis Regiomontani et Bernardi Walteri Observationes Novibergicae. Lugd. Bat. 1618. 4.

Tycho de Brahe, Astronomiae instauratae progymnasmata. Francofurti 1648.

——, Epistolarum astronomicarum libri. Uraniburgi 1596. 4. I, p. 105.

Keppler, Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur. Francofurti 1604. 4.

——, Epitome Astronomiae Copernicanae. Francofurti 1635, p. 74.

Scheiner, Refractiones coelestes, sive Solis elliptici phenomenon illustratum. Ingolstadii 1617. 4.

Lansberg, Tabulae motuum coelestium perpetuae etc. Middelburgi 1653. Fol.

Riccioli, Almagestum novum astronomiam veterem novamque complectens. Bononiae 1651. Fol. (Besonders Anhang pars II.)

Hevel, Prodromus astronomiae etc. Gedani 1690. Fol.

——, Selenographia. Gedani 1645. Fol.

——, Cometographia. Gedani 1668. Fol.

Schickhard, nach Weidleri historia astronomiae. Vitembergae 1741. 4. Cap. XV, § 52.

Digitized by Google

Cassini, nach Delambre histoire de l'astronomie moderne, wo sich ein Auszug findet aus: Cassini, Novissimae motuum solis ephemerides ex recentioribus tabulis Cassini a Com. Malvasia supputatae. 1661.

——, Tables astronomiques du soleil, de la lune etc. Paris 1740. 4. p. 152.

Picard, Voyage d'Uranibourg. Amsterdam 1736. Nach Delambre histoire de l'astronomie moderne. Tom. II. p. 618.

Newton, Principia philosophiae naturalis mathematica. Londini 1687. 4.

——, Tabula refractionum. Londini 1782. 4.

Halley, On refraction, with a table. Phil. Transactions. Lond. 1721. p. 169.

Lemonnier, Sur les réfractions horizontales. Mémoires de Paris. 1766, 1773, 1780, 1781.

Bouguer, Méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres. Paris 1729. Nach Delambre histoire de l'astronomie au dixhuitième siècle.

——, Sur les réfractions astron. dans la zône torride. Mém. de Paris 1739.

——, Sur les refractions astron. Mém. de Paris 1749.

Lacaille, Récherches sur les réfractions astronomiques; avec une table. Mém. de Paris 1755.

Horrebow, Atrium Astronomiae. Havniae 1732.

Huyghens, Traité de la lumière. Leide 1690. 4.

Wurzelbaur, nach Delambre histoire de l'astronomie moderne.

Le Gentil, Observations faites à Pondichéry sur les réfractions. Mém. de Paris 1774 et 1789.

——, Sur les réfractions horizontales au bord de la mer dans la zone torride. Mém. de Paris 1774.

De la Hire, Examen de la ligne courbe formée par un rayon de lumière, qui traverse l'atmosphère. Mém. de Paris 1702. pag. 52. 182.

——, Tabulae astronomicae. Paris 1702.

Cassini II., Des réfractions astronomiques. Mém. de Paris 1714.

Cassini III., Sur la réfraction. Mém. de Paris 1742, 1745.

Taylor, B., Methodus incrementorum directa et inversa. Londini 1725. 4. p. 108.

Hermann, J., Disquisitio dioptrica de curvatura radiorum visivorum atmosphaeram trajicientium. Acta erud. Lips. 1706. pag. 256.

Bernoulli, Jac., Opera II., p. 1063. Genevae 1744. 4.

Bernoulli, Joh., Opera III., p. 516. Lausannae et Genevae 1742. 4.

Bernoulli, D., Hydrodynamica. Argentorati 1738. 4. pag. 221.

Heinsius, G., De computo refractionum astronom. Lipsiae 1749.

Simpson, Th., Determination of the astron. refractions. Mathematical Dissertations. London 1743. 4.

Bradley, Astronomical Observations made ad the Royal Observatory at Greenwich from the year 1750 to the year 1762. Oxford 1798. Fol. Vol. I.

Mayer, J. T., De refractionibus atronomicis. Altorfii 1781.

Euler, De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère, selon les divers degrés de la chaleur et de l'elasticité de l'air. Mém. de Berlin 1754. p. 131.

Digitized by Google

Lagrange, Sur les réfractions astronomiques. Mém. de Berlin 1772.

Lambert, Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs. A la Haye 1759. 8.

——, Dasselbe. Aus dem Französischen übersetzt von Tempelhoff. Berlin 1772. 8.

——, Ueber die Strahlenbrechung. Berliner Jahrbuch für 1779.

Lexell, Von der horizontalen Strahlenbrechung. Berl. Jahrb. für 1779.

Damen, Refractionis astronomicae theoria. Hagae 1783.

Hennert, Ueber die mittlere Strahlenbrechung. Berl. Jahrb. für 1787.

Oriani, B., De refractionibus astronomicis. Eff. Mil. 1788.

Kramp, Analyse de réfractions astronomiques et terrestres. Strassbourg 1799. 4.

Klügel, Ueber die astronomische Strahlenbrechung. Berl. Jahrb. für 1804.

Laplace, Mécanique céleste. Tom. IV. — Auszug in Gilbert's Annalen B. 25, pag. 393.

Oltmanus, J., Untersuchungen über die Strahlenbrechung in den Tropenländern. Zach's monatl. Correspondenz. B. 16.

Humboldt, Essai sur les réfractions astronomiques. Voy. I, pag. 134. und Gilbert's Annalen 31. p. 337.

Tralles, Veränderung, welche die Feuchtigkeit in der Strahlenbrechung der Luft bewirkt. Gilbert's Annalen. 27. p. 428.

Groombridge, S., Observations on atmospherical refraction at it effects astronomical observations. Phil. Transact. for 1810, 1814, Connaiss. des temps 1818, 1821.

Brinkley, Anal. investigations on astron. refractions etc. Transactions of the R. Irish Academie. Dublin 1814.

Bessel, Fundamenta astronomiae pag. 28, 43. Königsberger Beobachtungen Band 7, pag. 38, Band 8, pag. 22. Tabulae Regiomontanae, Introductio. Berliner Jahrbuch 1826. Astron. Nachrichten. Band 2.

Young, Th., On the astronomical refraction. Philos. Transact. for 1819, 1824.

Ivory, On the astronomical refraction. Philos. Transact. for 1823, 1838.

——, Note on the astronomical refraction. 1835. Astron. Nachrichten, Band 12.

Svanberg, J., Disquisitiones analyticae in theoriam refractionum astronomicarum. Nov. act. reg. soc. scient. Upsaliae. Tom. 9 et 11. 1827, 1839.

Plana, Recherches analytiques sur la densité de couches de l'atmosphère et la théorie des réfractions astronomiques. Mém. de Turin pour 1822 et 1828.

Schmidt, J. C. E., Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Göttingen 1828.

——, Lehrbuch der physischen Geographie. Göttingen 1829. Band 2, pag. 305.

——, Ueber verschiedene Auflösungen des Problems der astronom. Strahlenbrechung. Quart. Journ. of Science 1825 p. 347.

Barfuss, Fr. W., Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Astron. Nachr. Band. 15.

Biot, Sur les réfractions astronomiques, Comptes rendus. 1836. II, 1854. II, 1855. Conn. des temps. 1839.

——, Sur la constitution de l'atmosphère. Compt. rend. 1836. II, 1838. I. Conn. des temps. 1841.

Digitized by Google

Lubbock, On astronomical refractions. London 1840.

——, On the theory of astron. refractions. Mem. of Ast. Soc. Tom. 24. 1855.

Baeyer, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Astron. Nachr. B. 41.

——, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Mém. de l'Academie de St. Pétersbourg 1860.

Einige wenige Abhandlungen, welche noch in Dove's Repertorium der Physik Bd. 2, p. XCVI, oder im Catalogus systematicus librorum in bibliotheca speculae Pulcovensis. Petropoli 1860. pag. 458—463 aufgeführt sind, konnte ich theils nicht erhalten, theils enthalten sie nur die Constantenbestimmung der Refraction oder die terrestrische Refraction und die letztere gedenke ich später zu bearbeiten.

Digitized by Google

INHALT.

Erster Abschnitt.

Die Geschichte der Refraction von der Entdeckung bis gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts, von Cleomedes bis Oriani.

Seite

§ 1. Definition der Refraction 3

§ 2. Die Entdeckung der Refraction. **Cleomedes, Ptolemäus, Sextus Empiricus** 5

§ 3. Die Refraction wird besprochen von **Alhazen, Vitellio, Roger Baco** 8

§ 4. Die Wiederentdeckung der Refraction durch **Bernhard Walther**, ihre Bestätigung durch **Maestlin**, den **Landgrafen von Hessen** und **Rothmann**, die erste wirkliche Bestimmung und Tafeln von **Tycho de Brahe** 11

§ 5. **Keppler** sucht vergeblich nach dem Brechungsgesetz, er stellt eine Theorie auf und berechnet danach Tafeln 15

§ 6. **Scheiner** schreibt ein Werk über Refraction, er macht sich besonders verdient durch seine Messungen des Sonnendurchmessers am Horizonte. — **Lansberg Riccioli, Hevel** sind Anhänger von Tycho und geben ebenso fehlerhafte Tafeln. — **Linnemann, Graves** und **Schickhard** haben richtigere Ansichten. — **Snellius**, ein Holländer, entdeckt, **Descartes** publicirt das Brechungsgesetz 21

§ 7. Beweise für das Brechungsgesetz: 1) nach der Annahme, dass das Licht, um von einem Puncte zum andern zu gelangen, immer die kürzeste Zeit gebrauche, 2) nach der Emanationstheorie, 3) nach der Undulationstheorie 26

§ 8. Erfindung des Barometers und Thermometers 30

§ 9. Die Theorie der Refraction von **Cassini**. — Tafeln. — **Picard** zeigt, dass die Refraction mit der Temperatur veränderlich ist 33

§ 10. Das **Mariotte**'sche Gesetz. Experimente von **Hawksbee, Joh. Cassini, Delisle**, wodurch bewiesen wurde, dass die Refraction der Dichtigkeit der Luft proportional ist. **Newton** erklärt die Refraction durch Attraction, **Halley** schlägt eine Correction der Refraction für verschiedene Barometerhöhen vor. **Lemonnier** findet Unterschiede in der Refraction von der Temperatur hervorgebracht, und beobachtet zur Bestimmung der Refraction Circumpolarsterne 40

§ 11. **Bouguer** bestimmt Refractionen in der heissen Zone, **Lacaille** entwirft Tafeln auf empirischem Wege und giebt nach **Halley's** und **Mayer's** Regel die erste Correctionstafel der Refraction nach dem Barometer- und Thermometerstande. **Roemer's** Ideen über Refraction, **Horrebow's, Wurzelbaur's** und **Le Gentil's** Tafeln. **Huygheus'** Ansichten 42

Digitized by Google

Seite

§ 12. Versuche die Curve des Lichtes in der Atmosphäre zu bestimmen, die Arbeiten von **De la Hire, Herrmann, Newton, Taylor, Joh. Cassini, Bouguer, Jacob, Johann, Daniel Bernoulli** 47

§ 13. **Simpson's** Regel, die Formel von **Bradley** 51

§ 14. **Bradley's** Tafeln, seine Correction wegen Barometer und Thermometer **Tobias Mayer's** Formel 56

§ 15. **Euler's** und **Lambert's** Arbeiten über Refraction 60

§ 16. Die Arbeiten von **Lagrange** und **Oriani** 67

§ 17. Rückblick auf das Bisherige und Stand der Refraction am Ende des 18. Jahrh. 75

Zweiter Abschnitt.

Die Arbeiten über Refraction von Kramp bis jetzt.

§ 1. Die Arbeiten auf dem Gebiete der Refraction in der ersten Hälfte des 19. Jahrh. 83

§ 2. Entwicklung der Differentialgleichung für die Refraction 86

§ 3. Ableitung der Refraction nach Cassini's, Simpson's und Newton's Hypothesen über die Dichtigkeit der Atmosphäre 88

§ 4. Integration des Integrals $e^{\dot{T}T}\int_T^\infty e^{-tt}\,dt$. Tafeln für dies Integral. 103

§ 5. Theorie der Refraction von **Laplace** 114

§ 6. Veränderung der Refraction wegen Barometer und Thermometer. — Ueber den Einfluss der Feuchtigkeit nach Laplace 121

§ 7. Theorie von **Bessel.** — Correctionen wegen Barometer und Thermometer . . 124

§ 8. Theorie von **Thomas Young** 131

§ 9 und 10. Theorie von **Schmidt** 135

§ 11. Theorie von **Ivory** 148

§ 12. Die Correction wegen Barometer und Thermometer 160

§ 13. Theorie von Lubbock 161

§ 14. Arbeiten von **Kramp, Plana, Brioschi, Svanberg, Biot, Baeyer** 167

§ 15. Allgemeine Uebersicht über die Theorien von **Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock.** Welche Constitution folgt aus diesen Theorien, welche stimmt am besten mit den Beobachtungen überein? 174

Digitized by Google

ERSTER ABSCHNITT.

DIE GESCHICHTE DER REFRACTION

VON DER ENTDECKUNG

BIS GEGEN DAS ENDE DES ACHTZEHNTEN JAHRHUNDERTS,

VON CLEOMEDES BIS ORIANI.

Digitized by Google

Digitized by Google

§ 1.

Definition.

Ein Etwas existirt im Weltraum, welches die Ursache der Sichtbarkeit, der Wahrnehmung der Gegenstände ist, dieses Etwas, der Vermittler zwischen den Dingen und unserm Auge wird mit dem Namen Licht bezeichnet. Das Vorhandensein des Lichtes giebt den Zustand der Helligkeit, sein Fehlen ist Finsterniss. Wie das Licht von dem Gegenstande zu unserm Auge gelangt, wie es sich fortpflanzt, darüber ist man bisher verschiedener Meinung gewesen, durch die neuesten Entdeckungen gewinnt aber die von Huyghens aufgestellte Hypothese, dass die Bewegung, analog der des Schalles, wellenförmig sei, immer mehr an Wahrscheinlichkeit und die Zahl der Anhänger der Newton'schen Emanationstheorie, nach der von den Gegenständen materielle Theilchen ausströmen, wird immer kleiner. — Sei es nun, dass das Licht sich durch die wellenförmige Bewegung des im ganzen Weltraume verbreitet angenommenen Aethers fortpflanzt, sei es, dass von dem Gegenstande, den wir sehen, materielle Theilchen sich mit der ungemein grossen Geschwindigkeit von 42,000 Meilen in der Secunde fortbewegen oder sei beides nicht richtig, immer bleibt der Grundsatz wahr, den schon Euclides 300 Jahre v. Chr. als ersten Erfahrungssatz aufstellt, dass „das von einem Gegenstande ausströmende, sich nach allen Seiten hin verbreitende Licht, welches angesehen werden kann als eine unendliche Menge neben einander liegender Linien, die mit dem Namen Lichtstrahlen bezeichnet werden, sich in grader Linie bewegt."

Eine durchsichtige Substanz, durch die die Lichtstrahlen durchgehen, heisst ein Medium. Sobald der Lichtstrahl in ein andres Medium eintritt, nimmt er eine andere Richtung an, er wird gebrochen. Der gebrochene Strahl liegt mit dem ursprünglichen in einer Ebene, man sieht es sehr gut an einem Stabe, der in ein Gefäss mit Wasser gestellt wird, er erscheint nicht grade, sondern gebrochen oder er bildet einen Winkel. Auch dies ist in den allerältesten Zeiten bekannt gewesen, denn der 7. Erfahrungssatz der

Digitized by Google

Euclides'schen Katoptrik [1]) heisst: „Wenn in ein Gefäss ein Gegenstand hineingeworfen wird und man sich so weit entfernt, dass der Gegenstand nicht mehr gesehen werden kann, so wird er wieder sichtbar, wenn man Wasser hinein giesst.“ Diese Erscheinung ist offenbar mit der vorigen identisch.

Der Weg, den der Lichtstrahl in dem neuen homogenen Medium zurücklegt, ist wieder ein grader. Geht der Lichtstrahl durch ein heterogenes Mittel, so wird er immer fort und fort gebrochen, man kann sich das heterogene Mittel nämlich in unendlich viele verschieden homogene Schichten zerlegt denken, in jeder Schicht beschreibt der Strahl einen gradlinigen, unendlich kleinen Weg, alle Wege zusammen genommen stellen eine gebrochene Linie von unendlich vielen Graden zusammengesetzt oder eine Curve dar. Betrachtet das Auge durch ein solches Medium einen Gegenstand, so sieht es ihn offenbar in der Richtung, in welcher der Strahl zuletzt aus dem heterogenen Mittel in das Auge tritt, in der letzten Tangente der Curve.

Unsre Erde ist mit einem solchen heterogenen Mittel umgeben, die Luft hat nicht in allen Höhen gleiche Dichtigkeit, je höher man steigt, desto dünner wird sie, und die Lichtstrahlen von den Gestirnen kommen durch dünne, dichtere und immer dichtere Schichten in unser Auge, ihr Weg ist daher keine grade, sondern, weil die Luftschichten nach und nach immer dichter werden, eine krumme Linie, eine Curve. Der von dem Sterne S kommende Lichtstrahl, in Figur 1, den wir, wenn das Medium bis A, unserm Auge, homogen wäre, wegen der unendlichen Entfernung der Gestirne in der Richtung S''A sehen würden, trifft in B die erste Luftschicht und wird dort gebrochen, in B' der zweiten, etwas dichteren Luftschicht wird er mehr gebrochen, in B'' und B''' immer mehr, so dass er in A unser Auge trifft und wir den Stern S in der Richtung AS', der letzten Tangente der Curve BB'B''B'''A sehen. Der Unterschied der Richtungen AS'' und AS' oder der Winkel S''AS' ist der Betrag der astronomischen Refraction.

Es sei AB in Figur 2 ein Medium, S ein Gegenstand, von dem ein Lichtstrahl ausgeht, so trifft dieser in E das Medium; er würde, wenn das Medium dieselbe Dichtigkeit wie der es bis S umgebende Raum hätte, in der Richtung EE'' fortgehen. Aber ist AB dichter, so wird der Lichtstrahl in E gebrochen und sein Weg ist SEE'. Der Winkel, den der Strahl SE mit der Normale DE auf BA macht, W. SED heisst der Einfallswinkel, W. E'ED', gebildet durch die Richtungen, die die Normale und der gebrochene Strahl mit einander machen, dagegen der Brechungswinkel. — Bei dem Uebergange des Lichtstrahls von einem dünnern in ein dichteres Medium nähert sich der Licht-

[1]) Man hat wegen einiger Fehler, die in der Optik des Euclides vorkommen, an der Aechtheit dieser Schrift gezweifelt, so unter anderm wird der 7. Erfahrungssatz zum Beweise der 31 Theoreme über Katoptrik gar nicht gebraucht. An der Aechtheit ist wohl kaum zu zweifeln, möglich aber, dass einige Sätze durch Commentatoren hinzugesetzt sind, siehe Wilde, Geschichte der Optik.

Digitized by Google

strahl dem Einfallslothe, der Brechungswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel. — Dieser Satz ist auch in dem erwähnten siebenten Erfahrungssatz des Euclides schon enthalten. Bei der astronomischen Refraction bewirkt er, da der Lichtstrahl in immer dichtere Schichten übergeht, dass die Curve unserm Auge die concave Seite zukehrt und wir das Gestirn durch die Refraction höher über dem Horizonte sehen, als es wirklich ist.

Beobachten wir auf der Erde einen Gegenstand, so erscheint dieser auch in einer andern Richtung, als er wirklich sich befindet, indem wegen der Krümmung der Luftschichten die Lichtstrahlen Schichten von verschiedener Dichtigkeit durchlaufen und dadurch der Weg eine Curve wird. Die Differenz zwischen der letzten Tangente der Curve und der wirklichen Richtung wird bezeichnet mit dem Namen: Terrestrische Refraction.

§ 2.

Die Entdeckung der Refraction. Cleomedes, Ptolemäus, Sextus Empiricus.

Die genaue Kenntniss sowohl der astronomischen wie der terrestrischen Refraction ist für den jetzigen Stand unserer Wissenschaften, der Astronomie, Geodäsie und verwandten Fächer von einer so grossen Wichtigkeit, dass ohne sie alle unsre Bestimmungen der Breiten, der Längen, der Deklinationen, Rectascensionen, alle unsre Höhen- und Azimutalwinkel so beträchtlich irrig würden, dass dadurch die ganze schöne Harmonie der Bestimmungen, gefunden auf den verschiedensten von einander ganz unabhängigen Wegen, aufhören und unsre Vorausberechnungen nur roh und genähert richtig sein würden. — Nicht so war es früher; erst seit der Zeit, dass unsre Instrumente so vollkommen sind, dass sie uns Bruchtheile von Sekunden angeben, ist es Bedürfniss geworden, die Refraction in allen Höhen genau zu kennen und dem Scharfsinne eines Laplace, Bessel, Ivory u. A. gelang es, Theorien aufzustellen, die der jetzigen Praxis vollkommen entsprechend sind. Die Nothwendigkeit hat diese Fortschritte hervorgebracht, und es ist zu bewundern, dass eine Erscheinung, die sich für eine bestimmte Gegend selten ereignet, das Eintreffen einer Mondfinsterniss bei Sichtbarkeit der Sonne schon vor fast 2000 Jahren die richtige Ursache entdecken liess.

Nicht den eigentlichen Beobachtern verdanken wir die Entdeckung der Refraction; die alten Indier, Chinesen, Chaldäer, Aegypter und Griechen hatten wenige Instrumente, und die sie benutzten, waren äusserst unvollkommen. Die ältesten Beobachtungen, die wir kennen, sind Beobachtungen von Conjunctionen, Finsternissen, die Örter der Sterne wurden anfangs nach dem Augenmaasse und in den Sternbildern angegeben und erst um das Jahr 300 v. Chr. fingen Timocharis und Aristyll an die Sphäre durch grösste Kreise einzutheilen und durch diese und auf diese die Sterne zu bestimmen und zu beziehen. Die

Digitized by Google

damaligen Beobachtungen waren aber noch viel zu ungenau, um Differenzen von einem halben Grade — so viel beträgt nämlich die Refraction am Horizont, — angeben zu können; selbst der grosse Hipparch (von 160 — 125 v. Chr.), der durch das Erscheinen eines neuen Sternes veranlasst wurde mittelst grosser Armillarsphären von 1026 Sternen die Längen und Breiten zu bestimmen, der sogar durch das erste Aufgehen der Sterne vor Sonnenaufgang in den Nachtgleichen die Praecession entdeckte, scheint von der astronomischen Strahlenbrechung nichts gewusst zu haben.

140 Jahre nach ihm (unter Augustus[1]) wird angenommen) lebte ein Schriftsteller Cleomedes, der uns ein Werk: Circularis inspectio meteorum (Basileae 1585) hinterlassen hat und in diesem kömmt die erste Erwähnung der Refraction vor[2]).

Dieses Werk, eine Sammlung philosophischer Arbeiten seiner Zeit und besonders des Posidonius, enthält etwas über die Messung eines Erdgrades, über den Durchmesser der Sonne und über Mondfinsternisse. Er hatte gehört, dass man eine Mondfinsterniss sehen könne, wenn Sonne und Mond gleichzeitig über dem Horizonte seien. Anfangs bestreitet er es, denn nach der Theorie müssten die Mittelpuncte der Sonne, der Erde und des Mondes nahe in einer Ebene liegen, und diese Theorie zu stürzen, sei deshalb nicht gut möglich, weil die Vorausberechnungen dieser Erscheinungen mit der Wahrheit übereinstimmten, denn nie bei einer andern Stellung des Mondes, als im Vollmonde, fände eine Mondfinsterniss statt. Das ihm zu Ohren gekommene Phänomen, meint er, könne daher nicht gut wahr sein, doch fährt er fort: „Ebenso wie ein Ring in einem Gefässe durch eingegossenes Wasser sichtbar „über den Rand emporgehoben wird, ebenso kann die Sonne durch die Re„fraction schon gesehen werden, wenn sie in Wirklichkeit noch unter dem „Horizonte ist." — Das ist alles, was wir von Cleomedes erfahren, es ist genug, um zu sehen, dass die Refraction bekannt war.

Mehr erfahren wir erst 140 Jahre später durch den grossen Ptolemäus, der 140 n. Chr. als der letzte grosse Stern über dem Horizonte der Alexandrinischen Schule glänzte, besonders dadurch, dass wir von ihm ein Lehrbuch der Astronomie, eine Optik, eine Geographie und andere Werke hinterlassen erhalten haben.

Seine Astronomie wurde im Mittelalter von den Arabern aus dem Griechischen ins Arabische übersetzt und Almagest genannt, welchen Namen sie noch jetzt trägt. Sie enthält eine Sammlung aller dem Ptolemäus bekannten Beob-

---

[1]) Cleomedes erwähnt keines spätern Astronomen als des Posidonius, man hat daher angenommen, dass er gleich nach diesem gelebt habe — das ist alles, was man über sein Zeitalter weiss.

[2]) Bei Posidonius sind Andeutungen, dass ihm die Existenz der Refraction bekannt gewesen, er hatte aber so irrige Begriffe davon, dass man ungewiss bleibt, ob er überhaupt gewusst habe, was Refraction eigentlich sei.

Digitized by Google

achtungen und giebt den Standpunct der Astronomie der damaligen Zeit an, der Refraction geschieht in dem ganzen Buche [1]) keine Erwähnung.

Die Optik des Ptolemäus ist uns nicht ganz bekannt, sie war einige Jahrhunderte gänzlich verloren [2]) und erst Laplace war so glücklich, sie in den verstaubten Manuscripten der Pariser Bibliothek wieder aufzufinden. Das vorhandene Exemplar ist eine lateinische Uebersetzung aus dem Arabischen mit 211 Seiten in Quartformat und 5 Abschnitte enthaltend. Der erste Abschnitt fehlt, doch enthält der zweite als Ueberschrift den Inhalt des ersten, und daraus weiss man, dass er vom Lichte und dem Auge, von ihren Aehnlichkeiten und Verschiedenheiten handelt. Der zweite bespricht die Bedingungen der Sichtbarkeit der Dinge, der dritte beschäftigt sich mit ebenen und erhabenen Spiegeln, der vierte mit Hohl- und zusammengesetzten Spiegeln, und endlich der fünfte enthält eine Dioptrik und ist dadurch der wichtigste. In ihm geht Ptolemäus von dem schon erwähnten Erfahrungssatze des Euclides aus, dass das Wasser einen Gegenstand höher erscheinen lässt, als er sich wirklich befindet. Die Ursache davon, sagt er, ist die Brechung und mit einem dazu eingetheilten Kreise bestimmt er von 10 zu 10 Grad zu den Einfallswinkeln die Brechungswinkel für die Medien: Luft und Wasser, Luft und Glas, und Glas und Wasser. Nachdem er dafür eine kleine Tafel gegeben, geht er zur astronomischen Refraction über, deren Existenz er durch folgende Worte beweist: „Invenimus res, quae oriuntur et occidunt, magis declinantes ad septem„trionem, et, cum fuerint orientes vel occidentes, circuli utique aequidistantes „aequinoctiali, qui describuntur super illas, propinquiores sunt ad septem„trionem, quam circuli, qui describuntur super illas, cum fuerint in medio coeli.“ An einer andern Stelle spricht er davon, dass die Differenz zwischen dem wahren und scheinbaren Orte desto geringer werde, je höher der Stern stehe und dass im Zenithe wahrer und scheinbarer Ort zusammenfalle und zwar deshalb, weil die senkrechten Strahlen keine Brechung erleiden; durch eine Figur zeigt er, dass in allen Fällen die Refraction die Sterne dem Zenithe nähere, dass dies auch in gewissen Fällen in Hinsicht des Poles gelte, dass aber auch gerade für den Pol entgegengesetzte Fälle stattfänden, das heisst dass die Refraction die Sterne vom Pole entferne [3]). Die Ursache der Re-

---

[1]) Lalande in seiner Astronomie, Edition 3, Tom. II., pag. 512, deutet auf eine Stelle im 8. Buche des Almagest hin und glaubt darin eine Andeutung auf die Refraction zu erblicken. Diese Stelle heisst in der französischen Uebersetzung von Halma Almag. T. II., pag. 112: Et il est bien difficile, dans les observations même des phases des étoiles, que le temps de la première apparition et de la disparition soit fixé juste, tant relativement à ceux qui les voient, qu'à cause de l'atmosphère, comme je l'ai reconnu par ma propre experience, et par la différence des resultats.

In dem ganzen Capitel spricht Ptolemäus von dem Erscheinen und Verschwinden der Sterne, von der Refraction scheint mir aber keine Andeutung zu sein.

[2]) Sie war in Europa bekannt vom 12. bis 15. Jahrhundert, Roger Baco und Fabricius z. B. erwähnen ihrer, nachher hielt man sie, bis Laplace sie auffand, für verloren.

[3]) Dies geschieht bei Sternen, die zwischen Pol und Zenith culminiren.

Digitized by Google

fraction ist der Uebergang der Lichtstrahlen aus dem Aether in die dichtere Luft, die er sich sphärisch um den Mittelpunct der Erde denkt. Um die Grösse der Refraction zu bestimmen, schlägt er vor, die Sonne, den Mond oder besser noch die Fixsterne in allen Zenithdistanzen zu beobachten und die wahren Zenithdistanzen zu berechnen, der Unterschied beider sei die Refraction. Diese Bestimmung war für ihn wegen der ungenauen Instrumente unmöglich, und eine Tafel für die Refraction auf theoretischem Wege zu entwerfen, sagt er, sei ihm nicht möglich, weil er die Höhe der Atmosphäre nicht kenne. Ein Gesetz jedoch müsse zwischen den Einfalls- und Brechungswinkeln stattfinden.

Dass Ptolemäus das Brechungsgesetz nicht fand, lag daran, dass seine oben erwähnten Tafeln der Einfalls- und Brechungswinkel Fehler über einen ganzen Grad zeigen; seine Begriffe von der Refraction waren ganz richtige, weit richtigere, als selbst 1400 Jahre später Tycho de Brahe sie hatte, er behandelte die Refraction ganz als Theoretiker, sie practisch zu bestimmen gab er nur den Weg an. Keiner nach ihm in vollen tausend Jahren hat mehr geleistet. Nur Erwähnung geschieht der Refraction, und zwar zuerst bei Sextus Empiricus zu Anfang des 3. Jahrhunderts in seiner Schrift: Adversus astrologos. Edit. Fabricii 1718. Lib. V. pag. 351, wo es, um einen Astrologen, der das Horoscop eines neugebornen Kindes stellen soll, und seine Kunst lächerlich zu machen, heisst: Der triftigste Grund gegen die Kunst der Chaldäer, der hier hinzugefügt werden muss, ist der, dass wegen Verschiedenheit der Luft nahe am Horizonte, weil hier die Luft sehr dicht ist, das eigentlich noch unter der Erde befindliche Zodion wegen der Brechung des Gesichtsstrahls schon darüber erscheint.

§ 3.

Die Refraction wird besprochen von Alhazen, Vitello, Roger Baco.

Es trat im Fortschritte der Wissenschaft eine grosse Pause ein, das Abendland opfert dem Kriege seine letzten Kräfte und viele Jahrhunderte verfliessen, bevor es sich erholen kann. Im Mittelalter herrschte eine Partei, die absichtlich jedes Streben nach Licht und Wahrheit unterdrückte und volle 13 Jahrhunderte verfliessen in Finsterniss und Aberglauben, nur im Morgenlande schimmert auf kurze Zeit ein kleines Sternenlicht durch.

Ein Volk tritt eine Zeit lang auf die Weltbühne mit dem Schwerte in der Hand, den Islam verbreitend und alles, was nicht im Koran steht, als etwas Ueberflüssiges und Unnützes betrachtend. Während aber noch im Jahre 641 der Kalif Omar die kostbare, reiche alexandrinische Bibliothek dem Feuer übergab, nahmen sich schon anderthalb Jahrhundert später, nachdem die Völker Asiens und Nordafrikas den Islam angenommen und das Schwert daher in die Scheide gesteckt war, die Kalifen zu Bagdad, die Abbassiden besonders,

Digitized by Google

der Astronomie an und ein Kalif Almamun (814—833) nimmt selbst unter ihren Jüngern eine ehrenwerthe Stelle ein. Um das Jahr 1100 lebte unter den Arabern ein Gelehrter mit Namen Alhazen, von dem wir eine Optik [1]) besitzen, in der zuerst die Refraction wieder besprochen wird.

Das Buch ist eingetheilt in sieben Abschnitte und der siebente enthält die Refraction, ein Anhang handelt von der Dämmerung.

Ob Alhazen die Optik des Ptolemäus gekannt hat, ist unentschieden, denn er selbst erwähnt an keiner Stelle seines Werkes des Ptolemäus. Montucla in der Histoire des mathematiques [2]) verdächtigt ihn, folgend einem Ausspruche Roger Baco's in der specula math. pag. 37, wo es bei Gelegenheit der Refraction heisst: „Sic autem Ptolemaeus in libro V. de Opticis docet, et Alhazen in libro VII."

Montucla kannte nicht die damals für verloren gehaltene Optik des Ptolemäus; nach der glücklichen Auffindung derselben durch Laplace hat sich herausgestellt, dass Alhazen, selbst wenn er das Buch des Ptolemäus gehabt hat, doch grosse Verdienste durch die Erweiterung der Optik sich erwarb. So z. B. stammt von ihm die noch jetzt bestehende Hypothese [3]), dass die Gestirne am Horizonte deshalb grösser erscheinen als im Zenithe, weil wir uns einbilden, dass sie wegen der dazwischen liegenden Gegenstände entfernter seien. Ja auch die Vergrösserung der Gegenstände, durch ein gläsernes Kugelsegment betrachtet, hat er gekannt, aber weder er noch Roger Baco haben nicht im entferntesten die Zusammensetzung zweier Glasstücke zu einem Fernrohre geahnt.

Dass der gebrochene mit dem einfallenden Strahle in einer Ebene liegt, dass beim Uebergange des Strahles von einem dünnen in ein dichteres Medium er sich dem Einfallslothe nähert, sind seine Erfahrungssätze; dass aber ein Gesetz zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel existire, will ihm nicht für den ganzen Quadranten möglich scheinen.

Die Refraction behandelt er auf ähnliche Art, wie Ptolemäus, und im siebenten Abschnitte, der „Stella videtur refracte" überschrieben ist, giebt er an, dass man sie bestimmen könne durch Beobachtungen der Sterne, welche das Zenith passiren. Mit einer Armillarsphäre solle man die Poldistanz des Sternes, wenn er am Horizonte und im Meridian stehe, messen, so würden sich Differenzen zeigen. — Ptolemäus drückt sich bestimmter aus, er sagt, dass im Zenith die Refraction verschwindet, Alhazen nicht so; doch indem dieser davon spricht, dass der Stern ohne Refraction unveränderlich sich auf demselben Parallele bewegen müsse, durch dieselbe sich aber dieser fortwährend ändre, so geht hervor, dass ihm bekannt gewesen ist dass die Refraction mit

---

[1]) Optica Alhazeni. Ejusdem de crepusculis, Optica Vitellionis cum commentariis a Fred. Risnero Basileae 1572. Fol.

[2]) Tom. I., pag. 313.

[3]) Artikel 51 und 55 des 7. Abschnittes.

Digitized by Google

der Höhe verschieden sei. Ebenso geht dies hervor aus dem 54. Artikel des 7. Buches, worin er beweist, dass am Horizonte durch die Refraction die Durchmesser der Gestirne verkleinert erscheinen müssten.

Merkwürdiger als der Tractat über die Refraction ist die Abhandlung über die Dämmerung. Im ersten Capitel dieses Anhanges erklärt er, dass die Abend- und Morgendämmerung von der Sonne herrühre, erstere nach dem Untergange, letztere vor dem Aufgange stattfinde und die Dauer derselben so lange währe, bis die Sonne 19 Grad unter dem Horizonte sei. Im 6. und letzten Capitel berechnet er die Höhe der Atmosphäre. — Ueberschrieben ist das Capitel:

Posita peripheria maximi in terra circuli 24000 milliarium Italicorum, erit summa vaporum in nubem coactorum a terra altitudo 52,000 passuum.

Der kleine Kreis in Figur 3 sei die Erde, der grosse die Sonne, c m o ein Theil der täglichen Bahn der Sonne um die Erde, der Kreis q z n um die Erde sei die Atmosphäre, in e stehe der Beobachter, so wird dieser den von der Sonne kommenden Strahl m q, der von der Atmosphäre in q reflectirt wird, wenn der Mittelpunct der Sonne sich noch in c befindet, sehen. Bevor man die Sonne oder den Rand der Sonne vielmehr sieht, hat sie noch den Bogen m o zu durchlaufen, und dieser Bogen der Dämmerungsbogen ist nach Alhazen 19 Grade. — Wie gross er den Schritt angenommen, wissen wir nicht, eben so wenig haben wir Bestimmtes über die italienische Meile, die Rechnung macht sich aber sehr einfach. Es ist

	W. o q m $= 19^0$ [1]), W. e q m $= 161^0$
und da	Δ e q k $\cong \Delta$ k q h und rechtwinkelig
so ist	W. q k h $=$ W. e k q $= 9^0\,30'$
und	r q $=$ (sec $9^0 30 - 1$) k h $= 0{,}013905$ k h.

Nimmt man k h den Halbmesser der Erde $=$ 859,6 Meilen, so folgt r q, die Höhe der Atmosphäre, nahe 12 Meilen. Für den jetzt gewöhnlich zu 18^0 angenommenen Dämmerungsbogen folgt r q $=$ 10,7 Meilen.

Auf eine so leichte, sinnreiche Weise löste der Araber, was Ptolemäus in seiner Optik für unmöglich hielt, nämlich die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, weiter aber mit der Bestimmung der Refraction ging er nicht. Ebenso wenig finden wir Neues in der von Risnero mit Alhazen's Optik zugleich herausgegebenen Optik von Vitello. Vitello erwähnt nur der Refraction und giebt zu Alhazen's Arbeit einige Zusätze aus der Optik des Ptolemäus. Eine von ihm gegebene Tafel der Einfalls- und Brechungswinkel

---

[1]) Streng genommen, ist der Winkel m q o nicht $= 19^0$, wenn der aus dem Mittelpunct k gezogene Bogen o m $= 19^0$ ist. Wegen der grossen Entfernung aber der Sonne im Verhältniss zum Erdhalbmesser kann die Differenz, die nur Secunden beträgt, vernachlässigt werden.

Digitized by Google

von 10 zu 10^0 der Lichtstrahlen von Luft in Wasser weicht wenig von der des Ptolemäus ab [1]).

Auch Roger Baco, Professor in Oxford bis 1294 (geb. 1214) erwähnt, aber nur ganz oberflächlich, der Refraction in seinen Werken.

§ 4.

Die Wiederentdeckung der Refraction durch Walther, ihre Bestätigung durch Maestlin, den Landgrafen von Hessen und Rothmann, die erste wirkliche Bestimmung und Tafeln von Tycho de Brahe.

Ueber 200 Jahre verfliessen, ohne dass auch nur in irgend einem Buche der Refraction gedacht wird. Der Schüler eines Mannes, der der erste Heros der wiederauflebenden practischen Astronomie genannt werden kann und besonders als erster Beobachter nach vielen Jahrhunderten wieder auftritt, Johannes Regiomontan's würdiger Mitbeobachter und Nachfolger, der reiche Patricier Bernhard Walther zu Nürnberg, der zuerst 1484 eine Uhr mit Räderwerk bei seinen Beobachtungen gebrauchte und die Methode den Ort eines Gestirns durch Distanzmessungen von zwei Fixsternen zu bestimmen einführte, fand die Refraction bei seinen Beobachtungen wieder auf. Im Jahre 1489 machte er die erste Beobachtung, vielleicht die älteste, welche überhaupt existirt, über die Refraction. Er sagt [2]): „Es ist zu bemerken, dass die Sterne „bereits durch die gebrochenen Strahlen über dem Horizonte gesehen werden, „wenn sie in Wirklichkeit noch unter demselben sind. Sextus Empiricus hat „dies gesagt 1000 Jahre früher, aber er hat es nicht beobachtet. Ich habe „diese Thatsache oft bemerkt, bevor ich den Alhazen und Vitello gelesen „habe, in deren Werken es klar ausgesprochen ist." — Um bei seinen Beobachtungen die Refraction zu eliminiren oder doch ihren Einfluss äusserst gering zu machen, stellte er seine Beobachtungen in der Nähe des Meridians an, und wenn er in der Nähe des Horizontes zu messen genöthigt war, z. B. bei Längendifferenzen zwischen Venus und der Sonne, half er sich damit, dass er durch ein Loth die scheinbare Länge der Sonne auf die wahre Ekliptik projicirte und die Länge der Sonne von dem Puncte in der Ekliptik an rechnete, in welchem das durch die Sonne gehende Loth die Ekliptik schnitt.

Der Landgraf von Hessen mit seinem Mathematiker Rothmann, und Maestlin, der Lehrer des grossen Keppler, bestätigten durch ihre Beobach-

---

[1]) Diese Tafel findet man in Gilbert's Annalen B. XL. pag. 385, in Wilde's Geschichte der Optik, pag. 80, und in Delambre's Histoire de l'astronomie ancienne, Tom. II., pag. 429.

[2]) Nach Delambre's histoire de l'astronomie du moyenne âge p. 339.

Digitized by Google

tungen das Vorhandensein der von dem Nürnberger Astronomen zuerst beobachteten Strahlenbrechung.

Das 16. Jahrhundert sollte aber noch mehr thun; durch Beobachtungen mit einer viel grössern Genauigkeit als früher hatte man das wieder gefunden, was Ptolemäus und Alhazen auf theoretischem Wege gefunden hatten. Dieser letztere Weg blieb noch lange verödet, der erstere wurde zuerst etwas mehr beschritten. Walther und seine nächsten Nachfolger eliminirten den Einfluss der Refraction; die ingeniöse Umgehung des erstern erforderte aber viele Mühe, und wie gross die Fehler noch geblieben sind, ist nicht untersucht, weil die Beobachtungen nur für ihre Gegenwart, nicht einmal für die nächste Zukunft gut genug waren. Dasselbe Jahrhundert war es, das noch einen Mann auf dem Felde der practischen Astronomie hervorrief, wie vor ihm noch keiner gewesen war.

Die äussere Veranlassung, dass ein Mann mit einer eisernen Beharrlichkeit, einer Selbstständigkeit und Festigkeit, die gar manchmal in Eigensinn, ja in Grausamkeit ausartete, sich der Urania widmete, war eine Erscheinung, die sich öfter ereignet und von so vielen Tausenden mit den gleichgültigsten Augen betrachtet wird: eine Sonnenfinsterniss im Jahre 1560 erweckte in Tycho de Brahe (geboren am 13. December 1546 zu Knudstorp in Schonen) den ersten Keim für die Wissenschaft, deren eifrigster Beförderer er wurde. Heimlich nur konnte er in Leipzig, wo er die Rechte studirte, die Sternkunde betreiben, und als er in seinem 17. Jahre fand, dass die Planetentafeln sehr fehlerhaft seien, war sein Bestreben sofort auf Verbesserung derselben gerichtet. — Hatte man bisher bis auf Grade oder aliquote Theile von Graden nur beobachtet: Tycho schuf sich neue Instrumente, mit denen er Minuten bestimmen konnte.

Auf der Uranienburg, der ihm vom Könige Friedrich II. von Dänemark auf der Insel Heven im Sunde 1576 erbauten Sternwarte, machte er seine durch Keppler so berühmt gewordenen Beobachtungen, während eines Zeitraumes von 20 Jahren. Mit zwei Instrumenten bestimmte er durch die obere und untere Culmination der Circumpolarsterne die Polhöhe und leitete sie auch aus den Wintersolstitialbeobachtungen der Sonne her. Bei dieser Ableitung fand er, mit der erstern Bestimmung verglichen, eine Differenz von 4 Minuten [1]), deren Ursache er anfangs dem Instrumente zuschrieb. Als er aber mit andern Instrumenten beobachtet und dieselbe Differenz gefunden hatte, kam er auf den glücklichen Gedanken, dass dies die Wirkung der Refraction sei. Von da fing er an mit einem 10füssigen Armillarinstrumente, das er sich eigens dazu baute, und einem Quadranten die Sonne von ihrem Aufgange bis zum Meridian und von da bis zum Untergange zu verfolgen und die Höhe zu beobachten. Er berechnete die Höhe, wie sie sein müsste ohne

---

[1]) Tycho de Brahe Astronomiae instauratae progymnasmata. Francofurt. 1648. pag. 15.

Digitized by Google

Refraction, und indem er diese von der beobachteten abzog, fand er für die verschiedenen Höhen den Betrag der zugehörigen Refraction.

Als Frucht vieler Beobachtungen und Berechnungen giebt er für die Sonne folgende kurze Refractionstafel [1]):

Tychonis Tabula Refractionum Solarium.

Altit. ⊙ Gradus.	Refractio. ′	″	Altit. ⊙ Gradus.	Refractio. ′	″
0	34′	0″	23	3′	10″
1	26	0	24	2	50
2	20	0	25	2	30
3	17	0	26	2	15
4	15	30	27	2	0
5	14	30	28	1	45
6	13	30	29	1	35
7	12	45	30	1	25
8	11	15	31	1	15
9	10	30	32	1	5
10	10	0	33	0	55
11	9	30	34	0	45
12	9	0	35	0	35
13	8	30	36	0	30
14	8	0	37	0	25
15	7	30	38	0	20
16	7	0	39	0	15
17	6	30	40	0	10
18	5	45	41	0	9
19	5	0	42	0	8
20	4	30	43	0	7
21	4	0	44	0	6
22	3	30	45	0	5

Diese Tafel ist das unverbesserte Resultat aus den Beobachtungen, die Parallaxe der Sonne ist noch darin enthalten und da der dänische Astronom selbst beweist [2]), dass die Parallaxe die Refraction vergrössert, so muss deren Betrag noch davon abgezogen werden.

Von der grossen Entfernung der Sonne hatte Tycho noch keinen richtigen Begriff, denn anstatt, dass nach Encke jetzt allgemein die Sonnenparallaxe zu 8″,57 angenommen wird, setzte er dafür 3 Minuten. Im Horizonte müssen also nach Tycho von der Refraction noch 3′, in 45 Grad Höhe noch über 2′ abgezogen werden und danach würde von 25 Grad Höhe an die Refraction negativ werden, ein Irrthum, dem schon Ptolemäus widersprochen hatte.

Doch Tycho hatte von der Theorie selbst ganz irrige Ansichten; im Anfange scheint er richtige Ideen gehabt zu haben, und er hatte sowohl die Optik des Alhazen, als die des Vitello gelesen. In einem Briefe an Rothmann [3]) spricht er von der verschiedenen Dichtigkeit der Luft als Ursache

[1]) Progymnasmata. pag. 39.
[2]) Progymnasmata. pag. 56.
[3]) Tychonis Epist. astron. I., pag. 105 et seq.

Digitized by Google

der Refraction, Rothmann widerlegt dies und sagt, wenn die Dichtigkeit der Luft die Ursache wäre, müsse die Refraction, wenn sie im Horizonte 3′ betrüge, in 45° Höhe noch 1′ 30″ betragen (?) und sich ausserdem bis zum Zenith erstrecken. In den Progymnasmata [1]) hält Tycho die Dünste in der Luft für die Ursache und giebt an, dass dadurch an verschiedenen Orten auch eine verschiedene Refraction stattfinde, und aus diesem Grunde sei auch die Strahlenbrechung der Fixsterne eine andre, als die der Sonne. Für die Fixsterne hört sie nach ihm bei 20° Höhe auf und für seine Beobachtungen nimmt er folgende Tafel [2]) an:

Refractionstafel für Fixsterne.

Höhe.	Refraction.		Höhe.	Refraction.	
0°	30′	0″	10°	5′	30″
1	21	30	11	5	0
2	15	30	12	4	30
3	12	30	13	4	0
4	11	0	14	3	30
5	10	0	15	3	0
6	9	0	16	2	30
7	8	15	17	2	0
8	6	45	18	1	15
9	6	0	19	0	30
10	5	30	20	0	0

Für Planeten gilt dieselbe Tafel.

Die Methoden, die Tycho zur Bestimmung anwandte, beschreibt er in demselben schon erwähnten Werke: Progymnasmata pag. 56. Es ist schon erwähnt, dass er sich der Quadranten bediente, er hatte deren zwei, und zwar einen für Höhenmessungen, der vertikal aufgestellt war und sich drehen liess, und einen für Azimutmessungen, dessen Alhidade nur bewegt werden konnte. Gleichzeitig mass er Azimute und Höhen, besonders der Sonne in der Nähe der Solstizien, weil sich alsdann ihre Declination am wenigsten änderte. Zu dem gemessenen Azimute berechnete er die wirkliche Höhe der Sonne, und die Differenz zwischen dieser und der beobachteten ist, wie schon oben gesagt, der Betrag der Refraction.

Die zweite Methode war, dass er an einer parallactischen Maschine eine Armillarsphäre befestigt hatte, hiermit, besonders auch die Sonne, beobachtete; er sah, dass die Refraction sie aus ihrer Bahn herausgebracht zu haben schien und mass gleichzeitig die scheinbare Declination und mit einem Quadranten die scheinbare Höhe. Aus diesen Daten, in Verbindung mit der aus den Sonnentafeln entnommenen wahren Declination, lässt sich die Refraction berechnen.

[1]) pag. 51.

[2]) Progymnasmata. pag. 216.

Digitized by Google

Tafel II., Figur 4 wird es näher erläutern:

Es sei Z das Zenith, P der Pol, S der wahre Ort der Sonne, S' der scheinbare, N Z P F der Meridian, N O F der Horizont, so mass Tycho O S' die Höhe, S' G die scheinbare Declination des Sternes; S H die wahre Declination kannte er aus den Tafeln. In dem sphärischen Dreieck Z S' P ist nun Z P das Complement der Polhöhe zu 90°, Z S' das Complement der Höhe zu 90° und S' P das Complement der beobachteten Declination zu 90°, also sind alle drei Seiten gegeben und man kann leicht den sogenannten parallactischen Winkel Z S' P berechnen. In dem sphärischen Dreieck P S' S ist W. P S' S = 180 — W. Z S' P, der eben berechnet ist; Seite P S' = 90° — der beobachteten Declination; Seite P S = 90 — der berechneten Declination aus den Tafeln, es sind also wieder drei Stücke gegeben und eins der unbekannten Stücke: die dritte Seite SS', welche dem Betrage der Refraction entspricht, lässt sich berechnen.

Auch lässt sich aus der Figur leicht der Betrag der Refraction in Rectascension und Declination finden, man ziehe die senkrechte S' Q, so ist S Q der Einfluss auf die Rectascension, S' Q auf die Declination, beide Grössen ergeben sich aber leicht aus dem kleinen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke S' S Q, in dem man nach den obigen Betrachtungen S' S und W. S' S Q abgeleitet hat.

Diese zweite Methode zur Bestimmung der Refraction ist nur von Tycho angewandt, sie ist wegen der so unpractisch gebauten Armillarsphären ungenau, und da diese abgeschafft sind, es ausserdem unbequem ist, Poldistanz und Höhe gleichzeitig zu messen, hat niemand nachher die Methode wiederholt. Die erste Methode dagegen ist weit einfacher, sie liefert genauere Resultate und ist in neuerer Zeit von Piazzi mit gutem Erfolge angewandt worden.

Durch Tycho war der Anfang zur wirklichen Bestimmung der Refraction gemacht, der Weg war vorgezeichnet und man hätte glauben sollen, dass Tycho's Nachfolger die Fehlerhaftigkeit seiner Theorie sofort gefunden hätten, doch man irrt, Keppler allein mühte sich, leider vergeblich, ab, die Theorie zu fördern, die übrigen Astronomen wagten nicht die Autorität eines Tycho anzugreifen, und fast ein volles Jahrhundert, bis zu Cassini, geht wieder dahin, bevor auch nur einer daran denkt, die Tychonischen Tafeln zu verbessern.

§ 5.

Keppler's Arbeiten über die Refraction.

Keppler (geb. 1571, gest. 1630), an dessen Namen sich der grösste Ruhm knüpft, weil er der eigentliche Begründer der Astronomie und Optik ist, weil er das, was Copernicus im Allgemeinen angedeutet hatte, genauer bestimmte und aus den trefflichen Beobachtungen des Tycho die Grundgesetze der ganzen astronomischen Wissenschaft ableitete, die das Fundament der Bewegung des ganzen Universums sind, arbeitete viel über Refraction, war aber hierin nicht so glücklich, wie sein Fleiss es wohl verdient hätte.

Digitized by Google

Im 4. Capitel seines Werkes: „Ad Vitellionem Paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur, Francofurt. 1604" sagt er, dass Alhazen und Vitello (die Optik des Ptolemäus war schon verloren) die Strahlenbrechung mit mehr Sorgfalt behandelt hätten, als sonst gewöhnlich der Fall gewesen sei. Die Ansichten von Tycho und Rothmann über die Ursache der Refraction verwirft er als falsch, er behauptet, dass weder die Entfernung noch der Glanz der Gestirne in der Refraction irgend eine Veränderung hervorbringen könne; er selbst aber irrt auch, indem er die Luft als unelastisch und überall gleich dicht und daher den Weg des Lichtes in der Atmosphäre als grade annimmt. Er erkennt an, dass Tycho die ersten Tafeln gegeben hat, er wiederholt diese Tafeln und giebt ausser den beiden für die Sonne und die Fixsterne auch die für den Mond, deren Horizontalrefraction 33′0″ beträgt, doch sind, sagt er, die Tafeln insofern falsch, dass sie die Refraction nicht bis zum Zenith hinauf enthalten, Sonne, Mond und Fixsterne müssen ausserdem eine und dieselbe Tafel haben.

Vergebens müht er sich ab, für die Refraction ein einfaches Gesetz zu finden, er findet, dass sie stärker als die Einfallswinkel wächst, er versucht, ob sie dem Sinus des Einfallswinkels, ob sie der Secante proportional sei, er findet keinen Zusammenhang, keine Uebereinstimmung und greift endlich zu einer zusammengesetzten Function. Er unterscheidet zwei Theile, einen Theil der Refraction, welche dem Einfallswinkel proportional ist und damit wächst, einen zweiten Theil, welcher proportional dem Ueberschuss der Secante des Brechungswinkels über die Einheit ist. Die Refraction r ist, wenn E den Einfallswinkel, E — r den Brechungswinkel bezeichnet:

$$(1) \quad \begin{aligned} r &= cE + cE\,[\sec(E-r) - 1] \\ &= cE \sec(E-r) \end{aligned}$$

wobei c eine zu bestimmende Constante bezeichnet, die für verschiedene Medien verschieden ist.

Für Wasser und Luft bestimmt er die Constante aus der Angabe des Vitello, dass für $E = 80^0$, $r = 30^0$ sei.

Es ist

$$(2) \quad c = \frac{r}{E} \frac{1}{\sec(E-r)}$$

für $r = 30^0$, $E = 80^0$

$c = 0{,}^0 24104$.

Er berechnet mit dieser Constante für E von 10 zu 10^0 die Refraction r, vergleicht sie mit der Tafel von Vitello und findet als grösste Differenz $^1/_2{}^0$, eine Genauigkeit, die ihm genügend erscheint.

Dasselbe Gesetz lässt er für Luft und den leeren Raum gelten und stellt sich die Aufgabe aus zwei gegebenen Refractionen, mit den zugehörigen Höhen für die übrigen Höhen die Refraction zu berechnen.

Mit Hülfe derselben Figur, welche 50 Jahre später Cassini zur Berechnung seiner Refraction gebraucht, löst er das Problem. Er findet, dass die für die Dämmerung angenommene Höhe der Atmosphäre von 12 Meilen viel zu

Digitized by Google

gross sei, um für die Refraction zu passen, und sagt, es folge nicht, dass die Materie, welche die Dämmerung mache, auch die Refraction hervorbringe.

Kömmt ein von F (Fig. 5) kommender Strahl in E an, so wird er so gebrochen, dass der Beobachter in B ihn sieht und zwar in der Richtung B E G [1]). Der W. F E N ist der Einfallswinkel, W. N E G der Brechungswinkel, W. I B G dagegen die scheinbare Zenithdistanz. Das Verhältniss des Brechungswinkels zur scheinbaren Zenithdistanz hängt ab von dem Verhältniss der Höhe der Atmosphäre E C zum Halbmesser der Erde A C = A B. Denn aus dem Dreieck A B E folgt, wenn ich W. I B G = Z, W. F E N = E, W. F E G = r, daher W. G E N = W. A E B = E — r setze:

$$\sin (E-r) : AB = \sin Z : AE$$

mithin

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad AE = AC + EC = \frac{AB . \sin Z}{\sin (E-r)}$$

und

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin (E-r) = \frac{AB}{AE} \sin Z$$

Für AB = 1,00000, AE = 1,00095 berechnet Keppler

zu

Z = 90°	E — r = 87° 30′
89	87 19
88	86 48
87	86 6
86	85 17
85	84 25
60	59 54½

und in 60° Zenithdistanz ist die Differenz des Einfallswinkels für die Atmosphäre und für das Auge nur unmerklich. Für 60° Zenithdistanz hat Tycho aber die Refraction 1′ 25″ gefunden und da sec (E — r) nahe sec Z = 2 ist, folgt aus (2)

$$c = 43'''$$

Tycho findet für Z = 89° r = 26′ 0″ und da c = 43‴ so eben gefunden, so ergiebt sich durch indirecte Rechnung aus (1), so fährt Keppler fort,

$$E - r = 87° 47'.$$

Dieser Werth aber stimmt nicht mit dem eben für Z = 89° und AE = 1,00095.AB gefundenen Werthe von E — r = 87° 19′ überein, unsre Voraussetzung von AE ist daher nicht richtig. Keppler untersucht noch mehrere

---

[1]) Keppler hat seine Figur so gezeichnet, dass G E B senkrecht zu A B D ist, alsdann ist W. G E H = W. I E B = W. B A E, weil die rechtwinkligen Dreiecke I E B und B E A ähnlich sind. Ist nun C E im Verhältniss zu A C gegeben, so lässt sich daraus W. B A E = W. G E H finden und da W. F E G gleich der Refraction ist, lässt sich auch der W. H E F an der Tangente H E I finden. Je kleiner C E im Verhältniss zu A C ist, desto kleiner wird auch der W. E A B, und der W. G E H hängt daher von der Höhe der Atmosphäre ab und dies will Keppler grade durch die Figur beweisen.

Digitized by Google

Refractionswerthe, findet aber für Alle verschiedene Werthe der Höhe der Atmosphäre, dennoch, meint er, ist kein Grund vorhanden die obige Hypothese zu verwerfen, Tycho hat zu verschiedenen Zeiten zwischen den Refractionen in denselben Höhen merkliche Differenzen gefunden. Da man wünschen wird zu sehen, wie an einem und demselben Tage die Refractionen in den verschiedenen Höhen sich ändern, wählt Keppler aus den Tychonischen Beobachtungen die Sonnenbeobachtungen vom 16. Januar 1587 von $3^h\,26'$ bis $3^h\,58'$ Nachmittags, in den Höhen von $3^0\,50'$ bis $0^0\,35'$. Er wählt die erste und letzte Beobachtung, nach welchen zu

$3^0\,50'$ Höhe oder $86^0\,10'$ Zenithdistanz die Refraction $= 14'\,22''$
$0\,35$ „ „ $89\,25$ „ „ „ $= 31'\,10''$

beträgt.

Zur letzten Beobachtung setzt er als:

1. Hypothese: $E - r = 87^0\,30'$, damit $E = 88^0\,1'\,10''$ und nach (2) findet sich
$c = 55''',6$ (Keppler hat $56''',5$).
Nach (3) ist $AE = 1{,}0009007$ (Keppler hat 1,0009000).

Für die erste Beobachtung berechne man nach (4) mit

$$Z = 86^0\,10',\ \frac{AB}{AE} = \frac{1}{1{,}0009007}\ \text{W.}\ E - r, \text{ und es findet sich}$$

$E - r = 85^0\,27',7$ (Keppler hat $86^0\,59'$ [1])
$E = 85^0\,42,1$ und nach (2) ist
$c = 47''',7$ (Keppler hat $42'''$).

Da dies c nicht mit dem aus der ersten Beobachtung übereinstimmt, schreitet er zur 2. Hypothese und setzt

2. Hypothese: $E - r = 89^0$, dann ist $E = 89^0\,31'\,10''$ und nach (2) findet sich
$c = 21''',9$ (Keppler hat $22'''$).
Nach (3) $AE = 1{,}000117$ (Keppler hat 1,0001005).

Zur ersten Beobachtung ist nach (4), $E - r = 86^0\,4',2$; $E = 86^0\,18,6$ und E und $E - r$ nebst c in (1) substituirt giebt

$r = 7'\,39''$ (Keppler hat $7'\,40''$)
statt $r = 14'\,22''$.

Es muss also noch als 3. Hypothese
$E - r = 88^0$, $E = 88^0\,31'\,10''$ gesetzt werden. Nach (2) und (3) kömmt
$c = 44'''$ $AE = 1{,}0005777$ und die erste Beobachtung nach (4) und (1) berechnet giebt
$r = 14'\,49''$ welche Annäherung Keppler für genügend hält.
Die strengen Werthe sind $c = 0'',75247 = 45''',1482$
$AE = 1{,}0005825$.

Keppler rechnet nun mit seinen gefundenen Werthen eine Refractionstafel und fügt die Tychonische bei zur Vergleichung, ich gebe sie hier im Auszuge und füge die mit $c = 0'',75247$, $AE = 1{,}0005825$ berechneten strengen Werthe hinzu.

---

[1]) Auf diesen Fehler macht auch Delambre in der Histoire de l'Astronomie moderne Tom. I. pag. 365 aufmerksam.

Digitized by Google

Keppler's Refractionstafel.

Z	E	E — r	Einfache Refraction.	Keppler's Tafel der Refraction.	Strenge Werthe.
1° 0,0	1°	1° 0,0	0′ 1″	0′ 1″	0′ 0,″8
2 0,0	2	2 0,0	0 2	0 2	0 1,5
3 0,0	3	3 0,0	0 3	0 3	0 2,3
4 0,0	4	3 59,9	0 3	0 3	0 3,1
5 0,1	5	4 59,9	0 4	0 4	0 3,8
10 0,2	10	9 59,9	0 7	0 7	0 7,6
20 0,4	20	19 59,7	0 14	0 15	0 16,0
30 0,7	30	29 59,6	0 22	0 25	0 26,0
40 1,1	40	39 59,4	0 29	0 37	0 39,3
50 1,4	50	49 59,0	0 36	1 0	0 58,5
60 1,9	60	59 58,5	0 44	1 28	1 30,2
70 3,0	70	69 57,4	0 51	2 31	2 33,6
80 5,6	80	79 54,3	0 59	5 36	5 43,4
85 11,1	85	84 48,2	1 3	11 36	11 46,2
86 14,0	86	85 45,4	1 3	14 51	14 34,7
87 19,4	87	86 41,1	1 4	18 27	18 52,3
88 33,1	88	87 34,0	1 5	25 34	25 59,6
90	88 35.3	88 2,7			32 34,6
—	89	88 21,1	1 6	38 30	38 52,8
—	90	88 57,7	1 6	61 30	62 18

Die Höhe der Atmosphäre ist für die Refraction nach Keppler nur 0,48 Meilen, später leitet er sie in seiner Epitome Astronomiae Copernicanae Francofurt. 1635 pag. 74 dem Alhazen gemäss aus dem Dämmerungsbogen von 18° zu 10 bis 11 Meilen ab.

Vergleichen wir die Refractionstafel von Keppler mit den jetzigen, so muss man ihre Genauigkeit bis zu 70 Grad Zenithdistanz bewundern, sie weichen nie mehr als 11″ ab und man muss gestehen, dass sie für die Beobachtungen der damaligen Zeit mehr als genau waren. Untersuchen wir noch, woher trotz der falschen Theorie diese Ganauigkeit kömmt.

Nach Keppler ist nach Formel (1)

$$r = c.E \sec (E - r)$$

oder wenn wir für c seinen Werth einsetzen

$$r = 45''',148.E \sec (E - r).$$

Bis zu 70° Zenithdistanz ist aber sowohl E, wie E — r so nahe mit Z übereinstimmend, dass man dafür gerne Z setzen kann und wir haben alsdann

$$r = 45''',148.Z \,.\, \sec Z. = 43'',2\ Z \sec Z,$$

wenn wir Z, anstatt in Graden, in Theilen des Radius ausdrücken.

Nach den jetzigen Refractionsformeln ist nahe

$$r^0 = 57'',3\ \mathrm{tg}\ Z$$

wo r^0 nur zur Unterscheidung statt r geschrieben. In einander getheilt ist

$$r^0 = r \,.\, 1{,}33\ \frac{\sin Z}{Z}$$

und

$$r^0 - r = r \left\{ 1{,}33\ \frac{\sin Z}{Z} - 1 \right\}$$

Digitized by Google

welches in Reihen entwickelt:

$$r^0 - r = r \{ 0{,}33 - 0{,}22 \cdot Z^2 + 0{,}011\, Z^4 - \ldots . \}$$

giebt und für

Z = 0	ist $r^0 - r$	= 0″0
10	„	2,5
20	„	4,8
30	„	7
40	„	9
50	„	11
60	„	10
70	„	6

Für grössere Zenithdistanzen ist die Abweichung grösser und besonders steigen die Differenzen in den achtziger Graden, welches auch wegen der beträchtlichen Grösse der Refraction daselbst und der Ungenauigkeit, welche die Tychonischen Werthe haben, nicht verwundern kann. Keppler leistete, was seines Geistes würdig war; hätte er das Brechungsgesetz gekannt, seine Tafeln wären sicher den Cassini'schen an die Seite zu stellen gewesen. Er musste seinen Nachfolgern doch auch Stoff zum Arbeiten übrig lassen!

Keppler berechnet noch in seinen Paralipomena die Dichtigkeit der Luft und findet sie $\frac{1}{11178}$, seine Höhe ist schon aufgeführt. Er beweist, dass durch die Refraction die Distanz zweier Sterne im Horizonte oder im Azimutalkreise allerdings verändert werde, diese Veränderung sei aber zu vernachlässigen, denn bei der Horizontalrefraction von 34′ und einer Entfernung von 90° im Horizonte werde diese Distanz um 17″ geändert, dagegen im Vertikalkreise sei die Aenderung beträchtlich, bei der eben aufgegangenen Sonne betrage die Verkürzung des vertikalen Durchmessers 5′.

Er wirft die Frage auf, ob an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten die Refraction dieselbe sei und beantwortet sie, indem er sagt: Gewiss ist, dass an verschiedenen Orten und zu ungewöhnlichen Zeiten die Refraction eine verschiedene und ungewöhnliche ist. Wenn die Höhe eines Ortes sehr gross ist, grösser als die Höhe der brechenden Atmosphäre, kann die Refraction verschwinden und besonders durch den Einfluss der Dünste wird sie beträchtlich. Wenn die Oerter und die Zeiten gleichmässig blieben, würden die Refractionen dieselben sein. Als Beispiel einer ungewöhnlichen Refraction führt er die am 7. Juli 1590 von seinem Lehrer Mästlin gemachte Beobachtung auf, in welcher er das Centrum der Sonne über dem Horizonte schon sah, als der am südlichen Rande verfinsterte Mond noch 2° über dem Horizonte stand, und als endlich der Mond untergegangen, war die Sonne schon 2° über dem Horizonte. Der Mond war aber untergegangen, bevor er bis zu seiner grössten Verfinsterung gekommen.

Als eine andere ungewöhnliche Beobachtung erzählt er, dass holländische Seeleute im Jahre 1596 auf der Insel Nova Sembla unter der nördlichen Breite von 76 Grad eingefroren seien; am 3. Novbr. neuen Stils verschwand ihnen die Sonne ganz, sie rechneten im Voraus und fanden, dass sie am 11. Febr. 1597 wieder erscheinen müsse; doch wie gross war ihr Erstaunen, als sie

Digitized by Google

bereits am 24. Januar den ersten Sonnenstrahl erblickten! am 25. Januar zeigte sich auch das Centrum, am 27. Januar die ganze Sonne. Keppler berechnet, wie viel Grade die Sonne noch unter dem Horizonte gewesen ohne Refraction, er findet 4^0 14' und berechnet die einfache Refraction für 90^0 zu 19' und die Höhe der Atmosphäre zu 2 Meilen. Das ist ihm zu unwahrscheinlich und er greift zu zwei andern Mitteln, um das Phänomen erklären zu können; Cleomedes führt sie im zweiten Buche „de mundo" auf. Entweder sei die Atmosphäre mit dicken Dünsten angefüllt gewesen, welche eine so starke Brechung hervorgebracht, oder auch eine Wolkenbank unter dem Horizonte, die allerdings dann mehrere Tage hätte stehen müssen, sei durch Reflexion die Ursache dieser Erscheinung gewesen.

Diese Beobachtung der Holländer ist später vielfach discutirt worden, einige zweifeln an ihrer Wahrheit, andere, wie z. B. Lalande, schlagen vor, wenn die Kälte es nicht zu sehr erschwere, durch Beobachtungen an Ort und Stelle die Sache zu untersuchen.

Kramp in seiner Analyse des refractions astronomiques beweist, dass die Horizontalrefraction im Januar sehr gross sein könne und er hält es nicht für unmöglich, dass diese enorme Refraction stattgefunden habe, ebenso hält Biot in seinen Recherches sur les refractions extraordinaires sie nicht für unmöglich.

Keppler stellt sich noch verschiedene Fragen über den Einfluss der Refraction bei den Beobachtungen im Alterthum, er meint, dass Hipparch die durch den Aufgang der Sonne bestimmten Aequinoctien falsch gefunden habe; er erklärt durch eine ausserordentliche Refraction die von Posidonius auf $7^1/_5{}^0$ anstatt 5^0 bestimmte Breitendifferenz zwischen Rhodos und Alexandrien und geht nachher zu Walther's Beobachtungen über und lobt dessen Methoden, den Einfluss der Refraction zu umgehen.

§. 6.

Scheiner schreibt ein Werk über Refraction. Landsberger giebt Refractionstafeln, Riccioli und Hevel ebenfalls. Linnemann, Graves. Snellius entdeckt, Descartes publicirt das Brechungsgesetz.

Dreizehn Jahre nach Keppler's Paralipomena ad Vitellionem im Jahre 1617 erschien von Scheiner (geb. 1580, gest. 1650) das Werk: Refractiones coelestes, sive Solis elliptici phaenomenon illustratum auctore Ch. Scheiner.

Der in der Optik berühmte Jesuit stellt in diesem Buche zuerst eine Menge Lehrsätze auf, die bereits im Euclides und Vitellio stehen; pag. 33 sagt er, die Refraction bringe es hervor, dass die Sonne nothwendig höher stehen müsse, als sie sich wirklich befinde. Nachdem er noch Plangläser, planconvexe, planconcave, biconvexe und biconcave Linsen, auch Crystalle

Digitized by Google

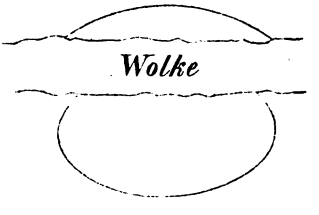
die Wolken, Nebel und andere durchsichtige Körper behandelt hat, geht er über zu den Erscheinungen der Gestirne.

Kein Stern, ausgenommen im Zenith, steht an seinem richtigen Orte; kein Stern zeigt, ausser im Zenith, seine wirkliche Höhe; die Sterne, welche am Horizonte erscheinen, sind in Wahrheit noch unter ihm. Solcher Sätze stellt er viele auf und geht über zu seinen Sonnenbeobachtungen [1]), die er am Horizonte beim Auf- und Untergange angestellt hat. Von seinen Messungen des horizontalen und verticalen Durchmessers der Sonne führe ich folgende auf:

Er fand den Verticaldurchmesser

1614	Jan. 9	Abends	bei	1°	Höhe	4′	51″	kleiner als	den	Horizontaldurchm.
„	Jan. 10	Morgens	„	1°	30′	„	3 46	„	„	„ „
„	Mai 3	Ab.	„	0	0	„	7 33	„	„	„ „
„	Juli 25	Mg.	„	0	0	„	8 5	„	„	„ „
„	Juli 26	Ab.	„	0	0	„	6 48	„	„	„ „
„	Sept.23	Ab.	„	0	0	„	5 0	„	„	„ „
„	Oct. 11	Ab.	„	0	0	„	5 40	„	„	„ „
„	„ 12	Mg.	„	0	0	„	7 17	„	„	„ „
„	Dcbr.22	Ab.	„	0	0	„	12 8	„	„	„ „

Auch hat er die Sonne oft nicht in der continuirlich elliptischen Form am Horizonte gesehen, einmal z. B. verdeckte eine Wolke einen Theil und er giebt von der Gestalt folgende Zeichnung:



Er beweist ferner die in Tycho's Progymnasmata vorkommende Erscheinung, dass bei einer Mondfinsterniss Sonne und Mond gleichzeitig über dem Horizonte sein können und dass Sonne, Mond und Sterne gleiche Refraction haben müssen.

Aus der Beschreibung seiner Instrumente sieht man, dass seine Beobachtungen nur die der damaligen Zeit entsprechende Genauigkeit haben und ausser seinen Sonnenbeobachtungen hat er weder die Praxis noch die Theorie der Refraction gefördert, doch ist nicht zu verkennen, dass er eine treffliche Zusammenstellung dessen gegeben hat, was vorhanden war.

Landsberger (geb. 1541, gest. 1632), ein niederländischer Astronom zu Middelburg, hat sich durch Sonnen- und Mondtafeln rühmlichst bekannt gemacht, in diesen sind auch Refractionstafeln enthalten, die fast mit den Tychonischen übereinstimmen und daher ebenso fehlerhaft sind.

---

[1]) Wir besitzen von ihm die ersten ordentlichen Beobachtungen von Sonnenflecken.

Digitized by Google

Riccioli, geb. 1598 zu Ferrara, gest. 1671, Professor der Philosophie, Theologie und Astronomie zu Bologna, schrieb einen Almagestum novum, in dessen zweitem Theile ein Anhang über Refraction enthalten ist. In diesem Anhange bespricht er die Werke von Alhazen, Vitellio, Tycho, Keppler und führt an, was man über Refraction wusste, er führt das Brechungsgesetz, welches Descartes 1637 publicirte, auf, und erläutert es durch ein Beispiel, es fällt ihm aber nicht ein, davon bei der astronomischen Refraction Gebrauch zu machen, er behandelt verschiedene Aufgaben, den Einfluss der Refraction und Parallaxe auf die Finsternisse, auf die Rectascentionen und Deklinationen der Sterne etc., folgt aber in Allem seinen Vorgängern. Er wagt die Höhen der Berge, des Caucasus, des Aetna und des Pic von Teneriffa wegen der Refraction zu corrigiren, hat aber von der terrestrischen Refraction noch gar keine Begriffe, sondern weil nach ihm die Spitzen dieser Berge aus der Höhe der die Refraction verursachenden Luft hervorragen, wendet er auf sie die astronomische Refraction an.

Am Schlusse giebt er Zusammenstellungen von Tafeln, und zwar zuerst die Tafeln der Einfallswinkel und Brechungswinkel für Luft und Wasser, Luft und Glas, Wasser und Glas und umgekehrt, von Vitellio; für Luft und Wasser von Keppler, dieselben von ihm nach dem Brechungsgesetz berechnet, darauf ähnliche Tafeln für Luft und Crystall, Luft und Wasser, Luft und Wein etc. von Marsennius und Kircher, und endlich die Refractionstafeln von Tycho, Keppler und Landsberger und seine eigenen, aus seinen Beobachtungen in Bologna bestimmt. Diese Tafeln, für Sonne, Mond und Fixsterne geltend, hören auf für die Sonne und Mond bei 45°, für die Fixsterne bei 20°, er folgt darin Tycho und hält diese Autorität zu gross, als dass er die theoretischen Schlüsse von Keppler und Andern vorziehen sollte. Das Einzige, was er mehr giebt als Tycho, ist, dass er drei verschiedene Refractionstafeln für den Sommer, die Aequinoctialzeiten und den Winter findet, worin also bereits eine Andeutung auf die Berücksichtigung der Temperatur liegt.

Seine Refractionstafeln geben für die Sonne, den Mond, die Fixsterne die Horizontalrefraction:

im Sommer	32′ 25″	33′ 0″	29′ 50″
in den Aequinoctialzeiten	33 0	33 40	30 10
im Winter	34 40	34 20	30 30
für 45° und 20° Höhe			
im Sommer	5″	6″	0″
in den Aequinoctialzeiten	6	10	2
im Winter	8	12	4

Hevel, der berühmte Danziger Astronom, geb. 1611, gest. 1687, war in der Refraction ebenso wie Riccioli ein treuer Anhänger von Tycho. In seinem 1640 erschienenen „Prodromus astronomiae" giebt er Refractionstafeln für die Sonne und Fixsterne, erstere mit 30′ 0″ Horizontalrefraction und mit 45° Höhe aufhörend, letztere mit 20° Höhe schliessend und für 0° Höhe 26′ 0″ Strahlenbrechung angebend.

Digitized by Google

Er spricht ferner von der Refraction in der 1645 publicirten Selenographie, er hat Vitellio's Optik und Keppler's Paralipomena gelesen und führt die von diesen Autoren aufgeführten Sätze auf, er erklärt, warum die Refraction die Sterne höher erscheinen lässt, warum sie im Horizonte am grössten ist, warum sie nach dem Zenithe kleiner wird und dort verschwindet. Ihm ist bekannt, dass sie die Tage verlängert, die ovale Figur der Sonne am Horizonte hervorbringt, dass sie nicht immer gleich gross in denselben Höhen ist, wie dies die Beobachtungen des Landgrafen von Hessen, von Maestlin u. A. zeigen. Er erwähnt der Arbeiten des Königsberger Professors Alb. Linnemann und des englischen Mathematikers Joh. Graves, nach denen die Atmosphäre in drei verschiedene Schichten, in die oberste dem Aether nächste, dichte, in die mittlere dichtere und in die unterste dichteste getheilt wird. Weil diese Schichten durch die aufsteigenden Dünste bald dichter, bald dünner sind, so ist auch die Refraction verschieden, der Weg des Lichtes bleibt sich nicht immer ähnlich gekrümmt, er behält nicht die kreisförmige Bahn, sondern nähert sich bald mehr der parabolischen, bald mehr der hyperbolischen.

Nach solchen grösstentheils richtigen Begriffen muss man sich wundern, dass Hevel in seiner 1668 publicirten Cometographie für die Cometen die Refraction nicht bis zum Zenith gehen, sondern sie schon bei 31^0 Höhe aufhören lässt. Die Horizontalrefraction setzt er 31′ 0″. Er beweist noch, dass die Krümmung der Cometenschweife keine Folge der Refraction sei.

Neben Linnemann kann auch noch der Tübinger Professor Schickard, der um 1650 lebte, genannt werden, der nach Weidler's Historia astronomiae Cap. XV. §. 52 richtige Begriffe von der Refraction gehabt haben soll.

Schon einige Mal ist das Brechungsgesetz erwähnt, Keppler hatte vergebens danach gesucht; aber noch bei seinen Lebzeiten fand es ein junger holländischer Mathematiker, der Professor Willibrod Snellius (geb. 1590, gest. 1626). Die Optik, in der er es niedergeschrieben, ist nie erschienen, er starb zu früh, doch Vossius und Huyghens haben sie gesehen, und berichten darüber, dass Snellius zwischen der Verlängerung CF (s. Fig. 6) des einfallenden Strahles GC in das Medium DEB, bis zur Parallelen (mit dem Einfallslothe ACB) DE und dem gebrochenen Strahle CE immer dasselbe constante Verhältniss gefunden habe.

Analytisch ausgedrückt heisst es:

Der Sinus des Brechungswinkels ist gleich dem Sinus des Einfallswinkels multiplicirt mit einer Constante.

Denn es ist W. GCA = W. FCB der Einfallswinkel,
W. ECB der Brechungswinkel.

Zieht man mit CD = 1 einen Bogen, so ist CF die Cosecante des Winkels FCB, CE die Cosecante des Winkels ECB. Snellius behauptet nun, dass

$$\frac{CE}{CF} = \text{Constante sei, dafür können wir setzen:}$$

Digitized by Google

$$\frac{\text{Cosec. ECB}}{\text{Cosec. FCB}} = \text{Const.}$$

und da die Cosecante $= \frac{1}{\text{Sinus}}$ ist

$$\frac{\text{Sin FCB}}{\text{Sin ECB}} = \text{Constante}$$

W. FCB und W. ECB sind aber die Brechungs- und Einfallswinkel, und mithin ist dadurch bewiesen, was bewiesen werden sollte.

In dieser letzten Form giebt es Descartes [1]) in seiner Dioptrik [2]), er sagt: „Nempe est in refractione: ut sinus anguli inclinationis unus ad sinum „anguli inclinationis alterius, ita sinus anguli refracti in una inclinatione ad „sinum anguli refracti in altera."

Er beweist es, indem er die Bewegung des Lichtes mit der Bewegung eines geworfenen Balles vergleicht. Ebenso wie der Ball, wenn er eine feste Fläche trifft, unter demselben Winkel zurückprallt, unter dem er auffällt, so auch das Licht, wenn es einen Spiegel trifft; bei der Reflexion sind der Einfalls- und der Ausfallswinkel einander gleich. Die Brechung ist zu vergleichen mit dem Wege des Balles, wenn er eine Fläche trifft und diese einem zarten Tuche gleicht; der Ball zerreisst die Fläche, seine Geschwindigkeit wird eine andere, auch sein Weg wird ein anderer.

Die Richtung AC des Balles (Fig. 7) lässt sich zerlegen in die beiden Componenten AD und DC und nur die Componente DC wird bei dem Zerreissen der Fläche ab eine Verminderung erleiden, der Ball gebraucht, um die Componente CE zu durchlaufen eine grössere Zeit, in dieser grössern Zeit wächst aber die horizontale Componente zu CG an, und anstatt ohne Widerstand in O anzulangen, erreicht er nur B. Solange das Medium dasselbe bleibt, wird AD zu CG immer in demselben Verhältniss stehen, AD ist aber der Sinus des Einfallswinkels, CG der des Brechungswinkels und wenn $\frac{AD}{CG}$ = Constante ist, so heisst das

$$\frac{\text{sin des Einfallswinkels}}{\text{sin des Brechungswinkels}} = \text{Const.}$$

---

[1]) Es ist unentschieden, ob Descartes das Brechungsgesetz selbst entdeckt, oder ob er es in Holland gehört und nur in andere Form eingekleidet hat, in seinem ganzen Werke führt er weder irgend eine Quelle, aus der er schöpfte, an, noch nennt er den Entdecker. Vossius in seinem „De lucis natura et proprietate. Amsterd. 1662 pag. 36" zweifelt nicht, dass Descartes bei seinem Aufenthalte in Holland es erfahren habe; der Professor Hortensius, ein Freund von Snellius, soll es sogar öffentlich gelehrt haben. Huyghens, der das Manuscript des Snellius selbst gesehen, ist der Meinung, dass Descartes es auch vielleicht in Händen gehabt habe. So viel ist sicher, Descartes lebte lange Zeit in Holland und war befreundet mit den ersten Familien, unter anderm mit Huyghens' Vater, so dass die Vermuthungen von Huyghens und Vossius einiges für sich haben. Die meisten Physiker, unter anderm wohl alle Deutschen, nennen Snellius den ersten Entdecker des Brechungsgesetzes, Arago dagegen nimmt im 9. Bande seiner sämmtlichen Werke, Leipzig 1855, p. 71 die Ehre der Entdeckung für seinen Landsmann in Anspruch.

[2]) Dioptrice cap. II. §. 7.

Digitized by Google

Der eben erläuterte Fall gilt, wenn der Ball von einem dichtern in ein dünneres Medium übergeht; für den umgekehrten Fall denkt Descartes sich, dass der Ball in C durch ein abermaliges Werfen eine grössere Geschwindigkeit in der vertikalen Componente bekömmt und die horizontale Componente wird in der Zeit, in welcher die vertikale C F durchlaufen ist, nur F H sein. Das Verhältniss zwischen A D und F H bleibt für dasselbe Medium aber immer dasselbe, wie klein oder gross man A D auch annehmen mag.

Nach dem Gesagten ist die Geschwindigkeit im dichtern Mittel grösser, als im dünnern. Descartes sagt, dass dies auch mit der Natur übereinstimme, denn die Erfahrung lehre, dass der Ball in seiner Geschwindigkeit viel mehr durch ein weicheres Mittel aufgehalten werde, als in einer härtern Substanz, ersteres entspreche dem dünnern, letzteres dem dichtern Medium.

§. 7.

Beweise für das Brechungsgesetz.

Dieses wichtige Gesetz ist eigentlich die Basis der ganzen Theorie der Refraction, und wenn ich daher bei ihm etwas verweile und mehrere Beweise gebe, so hoffe ich, dass man es mit der Wichtigkeit entschuldigen wird.

Gleich nach Descartes nahm Fermat, ähnlich wie schon 2000 Jahre früher Heron um das Reflexionsgesetz zu beweisen es that, an, dass die Natur dem Lichte, um von einem Punct zum andern zu kommen, die kürzeste Zeit vorschreibe, er fand dadurch das Brechungsgesetz bestätigt; nach diesem Principe musste aber die Geschwindigkeit im dichtern Medium geringer sein, als im dünnern. Von ähnlichen Principien gingen Leibnitz und Maupertuis aus, Newton bewies das Brechungsgesetz, seiner Emanationshypothese über das Licht gemäss, durch Attraction, und um dieser zu genügen, musste die Geschwindigkeit im dichtern Mittel grösser sein, als im dünnern; Huyghens, der Begründer der Vibrationstheorie des Lichtes, gab hiernach einen Beweis und fand umgekehrt, wie Newton, im dichtern Mittel eine Verzögerung der Geschwindigkeit. Ich gebe für alle drei Hypothesen die Beweise:

Das Licht soll (s. Fig. 8), um von a nach b zu gelangen, die kürzeste Zeit gebrauchen, b liege im dichtern Medium, und A B stelle die Grenze dar.

Lege ich der Bequemlichkeit wegen den Anfangspunct der Coordinaten irgendwo auf die Grenze A B, aber in der durch a und b gelegten Ebene; c sei der gefundene Durchschnittspunct in der Grenze A B; setze ich die Geschwindigkeit des Lichts auf a c = 1, auf c b = $\frac{1}{n}$ und gehört, um a c zu durchlaufen, dazu die Zeit s, zu b c, wenn das dichtere Medium nicht da wäre, die Zeit s', so ist nach unserer Hypothese die Bedingung, dass:

$$s + n s' = \text{Minimum}$$

ist.

Digitized by Google

Da a und b in der Coordinatenebene liegen, so ist eine ihrer rechtwinkligen Coordinaten = 0, und zwar die der y-Achse.

Die Coordinaten von a kann ich daher α, 0, γ; die von b α', 0, γ'; die von c, da ich noch nicht weiss, ob c mit a und b in einer Ebene liegt, x, y, 0 nennen, dann ist:

$$s = \sqrt{(\alpha - x)^2 + y^2 + \gamma^2}$$
$$s' = \sqrt{(\alpha' - x)^2 + y^2 + \gamma'^2}$$

und die Bedingung ist:

$$\sqrt{(\alpha - x)^2 + y^2 + \gamma^2} + n\sqrt{(\alpha' - x)^2 + y^2 + \gamma'^2} = \text{Min.}$$

Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dass für die Function

$$f(x, y, z, v, w \ldots)$$

der Werth des Minimum gefunden wird durch die Gleichungen:

$$\frac{d}{dx} f(x, y, z, v, w \ldots) = 0; \quad \frac{d}{dy} f(x, y, z, v, w \ldots) = 0 \text{ etc.}$$

Dies angewandt wird aus unserer Bedingung:

$$\frac{\alpha - x}{s} + n\frac{\alpha' - x}{s'} = 0.$$

$$\frac{y}{s} + \frac{ny}{s'} = 0$$

Die letzte Gleichung giebt $y = 0$, d. h. c liegt mit a und b in derselben Ebene.

Die erste Gleichung lässt sich nach der Figur schreiben:

$$\frac{ad}{ac} - n\frac{be}{bc} = 0$$

oder

$$\sin W.\, acd = n \sin W.\, ecb \quad \text{oder}$$
$$\frac{\sin W.\, acd}{\sin W.\, ecb} = n$$

W. a c d ist aber der Einfalls-, W. e c b der Brechungswinkel.

Beim Uebergange vom dünnern in das dichtere Medium nähert sich der Strahl dem Einfallslothe und daraus folgt, dass der Brechungswinkel kleiner als der Einfallswinkel ist, n ist mithin grösser als 1, $\frac{1}{n}$ ein ächter Bruch, und da $\frac{1}{n}$ die Geschwindigkeit des Lichtes im dichtern Medium nach dieser Hypothese ist, so verkleinert sich also die Geschwindigkeit in dichteren Mitteln.

Der zweite Beweis nach der Emanationstheorie gründet sich darauf, dass der Strahl a c nicht momentan in c die Richtung c b annimmt, sondern dies geschieht durch die Attraction des dichtern Mittels nach und nach, in c entsteht eine unendlich kleine Curve, von der a c und c b gewissermaassen die Asymptoten sind.

Es sei (in Fig. 9) a Q = y, c Q = x, die Anziehungskraft in der Entfernung y, $\varphi(y)$ und ϱ die Dichtigkeit des anziehenden Körpers, so ist nach den Grundsätzen der Dynamik:

Digitized by Google

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varrho\,\varphi(y); \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

wo das negative Zeichen in der ersten Gleichung deshalb steht, weil durch die Anziehung die Ordinate y vermindert wird.

Die erste Gleichung mit $2\,dy$, die zweite mit $2\,dx$ multiplicirt und integrirt, giebt:

$$(3) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = C - 2\varrho \int \varphi(y)\,dy$$

$$(4) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = C'$$

Die Geschwindigkeit des Lichtes in ac, wo die Anziehung des dichtern Mittels noch nicht wirkt, sei g, so ist, da $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$(5) \quad g^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}$$

und nennt man den Winkel $acd = \emptyset$, so ist

$$(6) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = g^2 \cos^2\emptyset$$

$$(7) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = g^2 \sin^2\emptyset$$

und nennt man den Werth des Integrals $\int \varphi(y)\,dy$ für denjenigen Werth von y, wo die Kraft $\varphi(y)$ unmerklich wird N, so hat man:

$$g^2 \cos^2\emptyset = C - 2\varrho N$$
$$g^2 \sin^2\emptyset = C'$$

mithin

$$(8) \quad C = g^2 \cos^2\emptyset + 2\varrho N$$

$$(9) \quad C' = g^2 \sin^2\emptyset$$

Diese Werthe in (3) und (4) eingesetzt geben

$$(10) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = g^2 \cos^2\emptyset + 2\varrho N - 2\varrho \int \varphi(y)\,dy$$

$$(11) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = g^2 \sin^2\emptyset$$

Für $y = 0$ wird $\int \varphi(y)\,dy$ als verschwindend betrachtet und am Eintrittspuncte des Lichttheilchens in das Medium ist:

$$(12) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = g\,g \cos^2\emptyset + 2N\varrho$$

$$(13) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = g\,g \sin^2\emptyset$$

Im Innern des dichtern Körpers hat man die zwei Gleichungen:

$$(14) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = +\varrho\,\varphi(y)$$

$$(15) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

In der erstern muss deshalb rechts das positive Zeichen stehen, weil die Ordinate y durch die anziehende Kraft vergrössert wird.

Digitized by Google

Mit 2 d y und 2 d x multiplicirt und integrirt, erhält man:

$$(16) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = K + 2\varrho \int \varphi(y)\, dy$$

$$(17) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = K'.$$

Für $y = 0$, wofür $\int \varphi(y)\, dy$ auch $= 0$ ist, müssen die Gleichungen (16) und (17) mit (12) und (13) übereinstimmen und dadurch wird:

$$K = gg \cos^2\vartheta + 2N\varrho$$
$$K' = gg \sin^2\vartheta$$

und (16) und (17) gehen über in:

$$(18) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = gg \cos^2\vartheta + 2N\varrho + 2\varrho \int \varphi(y)\, dy$$

$$(19) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = gg \cos^2\vartheta$$

Nimmt man auch im Innern des dichtern Medium für das $\int \varphi(y)\, dy$, wo die Kraft $\varphi(y)$ unmerklich wird, den Werth N an, so hat man im dichtern Medium:

$$(20) \quad \frac{dy^2}{dt^2} = gg \cos^2\vartheta + 4N\varrho$$

$$(21) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = gg \sin^2\vartheta.$$

Nennen wir die Geschwindigkeit im dichtern Mittel v, so ist

$$v^2 = \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} = gg + 4N\varrho$$

also da

$4N\varrho$ immer eine positive Grösse ist,

ist die Geschwindigkeit im Innern des dichtern Mittels grösser, als ausserhalb.

Bezeichnen wir den Winkel e c b mit ϑ', so ist nach der Zerlegung der Kräfte:

$$\frac{dx}{dt} = v \sin\vartheta' = \sin\vartheta' \sqrt{gg + 4N\varrho}$$

und da nach (21)

$$\frac{dx}{dt} = g \sin\vartheta, \quad \text{so folgt}$$

$$(22) \quad \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{gg}} = \text{der Constanten n,}$$

welche Brechungsverhältniss genannt wird.

Da ϑ den Einfallswinkel, ϑ' den Brechungswinkel bezeichnen, so ist durch (22) für die Emissionstheorie das Brechungsgesetz bewiesen.

Für die Vibrationstheorie giebt Huyghens folgenden Beweis:

Man denke sich (Fig. 10) eine Lichtwelle A C, die, da man ihren Halbmesser sehr gross annehmen kann, als gradlinig zu betrachten ist. Wäre kein Medium C B vorhanden, so würde die Welle A C ungehindert bis B D gelangen; während aber der eine Theil in A ist, stösst der andere C bereits auf das dichtere Mittel und C wird dadurch zum Mittelpunct einer Particularwelle werden

Digitized by Google

müssen, die, wenn das Verhältniss der Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien, die das Licht durchläuft, wie 1 : n ist, den Radius $n \cdot AB = C\beta$ haben wird. Auf ähnliche Weise wird in dem unendlich nahen Puncte C' wieder eine Particularwelle entstehen, mit dem Radius $n \cdot A'B = C'\beta'$ und so auch in C'', C''' mit den Radien $n \cdot A''B = C''\beta''$, $n \cdot A'''B = C'''\beta'''$. Die gemeinschaftliche Tangente $B\beta$ präsentirt die Hauptwelle und wenn HC als einfallender Strahl betrachtet wird, stellt CH' den gebrochenen dar.

Nach den ersten Elementen der Geometrie ist:

$$W.\,CB\beta = W.\,H'CY \quad \text{(weil CB senkrecht zu XY ist)}$$

und $W.\,ACB = W.\,HCX$ und gefunden war:

$$C\beta = n \cdot AB$$

oder $$\frac{C\beta}{CB} = n\frac{AB}{CB}$$

oder $$\sin CB\beta = n \sin ACB,$$

mithin auch $$\sin H'CY = n \sin HCX \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin H'CY}{\sin HCX} = n,$$

welches, da W. HCX der Einfalls-, W. H'CY der Brechungswinkel ist, zu beweisen war.

Schon erwähnt ist, dass beim Uebergange aus einem dünnern in ein dichteres Mittel der Brechungswinkel kleiner, als der Einfallswinkel ist, und daher muss hierfür n ein ächter Bruch sein; n ist die Geschwindigkeit im dichtern Mittel, wenn die im dünnern Mittel = 1 gesetzt wird; nach der Vibrationstheorie bewegt sich also das Licht im dichtern Mittel langsamer. Dies ist in der That durch die neuern Versuche von Fizeau und Foucault [1]) bestätigt und das Brechungsgesetz kann in Folge dessen als ein Beweis für die Richtigkeit der Vibrationstheorie angesehen werden.

§. 8.

Erfindung des Barometers und Thermometers.

Schon Tycho de Brahe bemerkt in den Progymnasmata pag. 39, dass die Refraction nicht immer dieselbe sei; Riccioli giebt für den Sommer, die Aequinoctialzeiten und den Winter drei verschiedene Tafeln, Cassini und Picard, zu denen ich gleich nachher übergehen werde, fanden Differenzen zwischen Winter und Sommer, zwischen Tag und Nacht, und zwar war im Winter die Refraction grösser als im Sommer, in der Nacht grösser als am Tage, Picard schrieb richtig jenen Unterschied den Temperaturdifferenzen [2]) zu, er kam hierauf, indem er sah, dass plötzlich bei Sonnenaufgang sich einst die Horizontalrefraction um 25'' änderte, und analog damit zeigte sich vom Mont-

[1]) Dove's Farbenlehre. Berlin 1853, pag. 53.

[2]) Histoire céleste ou Recueil de toutes les observations astronomiques par le Monnier. Paris 1741, pag. 19.

Digitized by Google

Valérien aus vor Sonnenaufgang die Thurmspitze von Notre-Dame in Paris 20′ unter dem Horizonte, nach Sonnenaufgang plötzlich 22′. Halley entdeckte, dass die Refraction von der Dichtigkeit der Luft abhinge, Bouguer gab durch seine Beobachtungen am Aequator dafür eine Bestätigung.

Es zeigte sich die Nothwendigkeit, die Dichtigkeit der Luft in Rechnung zu ziehen, und glücklicher Weise hatte man kurz vor der Entdeckung dieser Nothwendigkeit die nöthigen Instrumente, das Barometer zum Luftdruck, das Thermometer für die Temperatur, erfunden.

Das Thermometer (Wärmemesser) wurde 1638 von dem Mechaniker Cornelius Drebbel erfunden, es hatte aber noch eine unvollkommene Form und keine Theilung.

Die Akademie del Cimente gab dem Instrumente die jetzt gebräuchliche Form, indem sie die Glaskugel mit der Röhre daran wählte, in der sich eine Flüssigkeit befindet. Bei Vermehrung der Wärme dehnt sich die in der Kugel befindliche und einen Theil der Röhre füllende Flüssigkeit aus und steigt empor, bei Verminderung der Wärme zieht sie sich zusammen und fällt in der Röhre, und bringt man an dieser eine Theilung an, so hat man das Thermometer vollständig. — Drebbel hatte zur Flüssigkeit eine Kupferlösung, die Akademie del Cimente nahm Weingeist; der Nullpunct ihrer Theilung entsprach, wie Libri gefunden, dem 15. Grad der jetzigen Reaumur'schen Scale, der 50. Grad dem 44. derselben Theilung.

Im Jahre 1709 hatten die Danziger einen etwas strengen Winter, und der Wetterglasverfertiger Fahrenheit führte einen andern Nullpunct ein, der der grössten Kälte des damaligen Winters entsprach. Später, um diesen Nullpunct wieder herzustellen, setzte er seine Thermometer in eine Mischung von Eis, Wasser und Salmiak. Die Temperatur dieser Mischung war immer ziemlich dieselbe und dadurch erreichten seine Thermometer eine weit grössere Genauigkeit, als die frühern. Er setzte auf seiner Scale 32, sobald diese Temperatur dem Gefrieren des Wassers entsprach, der Blutwärme gab er 96°, dem siedenden Wasser 180 Grad. Im Jahre 1714 fing er an, den Weingeist durch Quecksilber zu ersetzen und dieser Fortschritt war ein bedeutender, indem sich durch die Untersuchungen von de Luc [1]), Flaugergues [2]), Gay-Lussac [3]) und Dulong und Petit [4]) gezeigt hat, dass Quecksilber, seiner der Wärme der Luft am nächsten kommenden Ausdehnung wegen, den Vorzug verdient. Die Thermometer mit der angegebenen Eintheilung sind noch allgemein unter dem Namen Fahrenheit'sche bekannt.

Reaumur, der Zeitgenosse von Fahrenheit, setzte den Nullpunct dahin, wo das Thermometer hinzeigte, wenn Wasser zu gefrieren anfängt, der Temperatur des kochenden Wassers gab er 80 Grade. Seine Thermometer waren

---

[1]) Philos. Transact. LXVIII. pag. 503.
[2]) Journal de Physique LXXXII. pag. 401.
[3]) Laplace, mécanique céleste Tom IV. pag. 270.
[4]) Annales de Chemie et de Physique VII. pag. 118.

Digitized by Google

mit Weingeist gefüllt und kamen den Fahrenheit'schen nicht gleich — Thermometer mit seiner Eintheilung heissen Reaumur'sche.

Endlich hat noch der Schwede Celsius der Bequemlichkeit wegen das Intervall 0 bis 80 Grad Reaumur in 100 Theile getheilt und solche Grade heissen Celsius- oder hunderttheilige Grade.'

Die jetzigen Thermometer sind mit Quecksilber gefüllt. Die Engländer rechnen gewöhnlich nach Fahrenheit-, die Deutschen nach Reaumur-, die Franzosen nach Celsius-Graden, letztere als dem Decimalsystem am angemessensten werden wohl die Oberhand gewinnen.

Zu derselben Zeit, als Cornelius Drebbel das erste Thermometer verfertigte, wurde dem grossen italienischen Physiker und Astronomen Galilei der Fall vorgetragen, dass ein Gärtner eine sehr genau gearbeitete Wasserpumpe von 40 Palmen Länge habe machen lassen und das Wasser nur 18 Ellen oder 32 Pariser Fuss darin emporsteige, der andere Raum aber leer bleibe. Galilei meinte, der Abscheu der Natur gegen das absolut Leere habe seine Grenzen, sein Schüler Evangelista Torricelli untersuchte die Sache weiter, er nahm statt des Wassers Quecksilber und fand im Jahre 1643, dass dieses in einer luftleeren Röhre nur 28 Zoll hoch steige. Da nun 28 Zoll zu 32 Fuss sich nahe wie das specifische Gewicht des Wassers zu dem des Quecksilbers verhält, so schloss Torricelli, dass die 28 Zoll hohe Quecksilbersäule einer Luftsäule von der Höhe der Atmosphäre das Gleichgewicht halte, und durch diesen glücklichen Gedanken war er der Erfinder des Barometers geworden.

Er theilte seine Entdeckung dem Pater Mersenne mit, durch den Descartes und Pascal davon benachrichtigt wurden. Letzterer verschaffte sich von der Erklärung des Torricelli dadurch Aufschluss, dass er seinen Schwager Perrier zu Clermont bewog, mit einem Barometer den nahe gelegenen Puy de Dome zu besteigen. Nach der Definition des Torricelli musste das Barometer bei 3000 Fuss Höhe um 3 Zoll fallen, und zu seiner Freude fand Pascal dies nahe bestätigt. Leicht, sollte man glauben, hätte man weitere Schlüsse gezogen, man hätte gleich versucht, die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, oder wenigstens untersucht, ob die Dichtigkeit der Luft in allen Höhen dieselbe sei; doch es dauerte noch eine geraume Zeit, bevor Mariotte das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft bei gleicher Temperatur entdeckte.

Das von Torricelli angegebene Gefässbarometer, bestehend in einer etwa 3 Fuss langen luftleeren Glasröhre nebst einer Scale mit einem Quecksilbergefäss darunter, und das vorzüglich von de Luc genau untersuchte Heberbarometer, eine umgebogene, mit Scale versehene Glasröhre, wovon das eine Ende $2^1/_2$ Fuss länger als das andere und luftleer sein muss, in welchem das Quecksilber dem im andern Ende befindlichen nebst der darauf drückenden äussern Luft das Gleichgewicht hält, sind hauptsächlich im Gebrauch. Die Scalen sind entweder auf dem Glase selbst oder auf Messing in Pariser oder Englische Zolle oder Millimeter getheilt; bei dem Gefässbarometer ist auch eine Vorrichtung zum Verschieben der Scale nöthig, um sie von der Oberfläche des im Gefässe befindlichen Quecksilbers an zu rechnen. (Man kann

Digitized by Google

auch durch Rechnung hierfür bei einer festen Scale die Correction finden.) Gewöhnlich sind die Barometer auch mit einem Thermometer versehen, indem es zur strengen Reduction nöthig ist, die Temperatur des Quecksilbers zu kennen, und die Ablesung an der Scale geschieht mittelst eines Nonius oder Mikroscopes. Ein weiteres Eingehen auf die Construction und die Correctionen dieser Instrumente kann nicht Zweck dieser Arbeit sein, es ist hier genügend zu wissen, dass, als man nöthig fand, bei der Refraction die Barometer- und Thermometer-Correctionen zu berücksichtigen, die Instrumente erfunden waren. In jedem Lehrbuch der Physik findet man ausserdem nähere Erörterungen.

§. 9.

Die Theorie der Refraction von Cassini. Seine Tafeln. Picard's Arbeiten.

Cassini, geb. am 8. Juni 1625 zu Perinaldo (Nizza, Oberitalien), gest. 1712, lebte anfangs in Bologna, wurde aber später von Ludwig XIV. nach Paris berufen und zeichnete sich als erster Director der 1670 vollendeten Sternwarte durch genauere Theorien der Sonnenbewegung, der Finsternisse, der Bewegung der Jupitertrabanten und durch zahlreiche andere Entdeckungen rühmlichst aus. Zu Bologna schon, wohin er durch den Marquis Malvasia berufen war, beschäftigte er sich mit der Construction von Sonnentafeln aus seinen Beobachtungen und fand, dass es unumgänglich nöthig sei, genaue Refractionstafeln zu haben. Er kannte die Tychonischen Tafeln, er wusste, dass die Refraction bis zum Zenith gehen müsse und nahm sich vor, den von Keppler betretenen theoretischen Weg zu verfolgen.

Er studirte die Brechung der Lichtstrahlen zwischen Luft und Glas, zwischen Luft und Wasser und andern Flüssigkeiten, er fand das schon 30 Jahr früher von Snellius entdeckte Gesetz des constanten Verhältnisses zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, er nahm richtig an, dass dies Gesetz auch für den leeren Raum und die Luft gelte, er setzte voraus, dass die Atmosphäre in allen Höhen gleich dicht sei, und durch die Horizontalrefraction von 32′ 20″ und die Refraction in 19 Grad Höhe gleich 5′ 28″ bestimmte er den Brechungscoefficienten und die Höhe der Atmosphäre und nachdem er diese Grössen bestimmt hatte, entwarf er seine Tafeln.

Es sei (Fig. 11) C der Mittelpunct der Erde O A Q, N E E′ M sei die Oberfläche der Atmosphäre, S E, S′ E′ zwei Strahlen, die von den Sternen S, S′ kommen, in E und E′ der Oberfläche der Atmosphäre werden sie gebrochen und das in A befindliche Auge sieht sie in der Richtung A E S^0, A E′ S'^0. Die Winkel S E S^0, S′ E′ S'^0 repräsentiren den Betrag der Refractionen, ich nenne sie r, r′, die Winkel S^0 E F, W. S'^0 E′ F′ sind die Brechungswinkel, die ich respective E, E′ nenne, die Winkel S E F, S′ E′ F′ sind die Einfallswinkel = E + r, E′ + r′. Der Radius C A sei = 1, die Höhe der Atmosphäre A a = x, so

Digitized by Google

hat man, wenn W. Z A S^0, W. Z A S$'^0$ = z, z' genannt, und $\frac{1}{1+x}$ = cos u, sodass x = sec u — 1 wird, nach dem Brechungsgesetz:

$$\left.\begin{aligned} \sin(E + r) &= n \sin E \\ \sin(E' + r') &= n \sin E' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \sin E &= \sin z \frac{AC}{EC} = \sin z \frac{1}{1+x} = \sin z \cos u \\ \sin E' &= \qquad\qquad\qquad\quad \sin z' \cos u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$n = \frac{\sin(E + r)}{\sin E} = \cos r + \sin r \operatorname{cotg} E$$

$$n = \frac{\sin(E' + r')}{\sin E'} = \cos r' + \sin r' \operatorname{cotg} E'$$

mithin

$$\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r} = \frac{\sin r'}{\sin r} \operatorname{cotg} E' - \operatorname{cotg} E \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Aus (2) erhält man

$$\cos E = \cos u \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z}$$

und

$$\operatorname{cotg} E = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z}}{\sin z}$$

Ebenso

$$\operatorname{cotg} E' = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z'}}{\sin z'}$$

und in (3) eingesetzt

$$\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r} = \frac{\sin r'}{\sin r \sin z'} \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z'} - \frac{1}{\sin z} \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z} \quad (4)$$

Unsere Aufgabe ist u zu bestimmen, wenn z, z', r, r' gegeben sind; aus dieser Gleichung u direct zu finden, da es zweimal unter dem Wurzelzeichen vorkommt, ist nicht möglich. Nehmen wir aber mit Cassini z = 90^0, also sin z = 1, cos z = 0, so ist eine Lösung durch eine quadratische Gleichung ausführbar.

Wir erhalten nämlich zuerst:

$$\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r} \sin z' + \operatorname{tg} u \sin z' = \frac{\sin r'}{\sin r} \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \cos^2 z'}$$

und quadrirt

$$\left(\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r} \sin z'\right)^2 + 2 \operatorname{tg} u \sin z' \left(\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r} \sin z'\right) + \sin^2 z' \operatorname{tg}^2 u = \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 r} \operatorname{tg}^2 u + \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 r} \cos^2 z'$$

oder geordnet und mit $\frac{\sin^2 r}{\sin^2 r'}$ multiplicirt und der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos r - \cos r'}{\sin r'} \sin z' &= A \\ \frac{\sin r}{\sin r'} \sin z' &= B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

gesetzt,

$$\operatorname{tg}^2 u (1 - B^2) - 2AB \operatorname{tg} u = A^2 - \cos^2 z' \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

woraus

$$\operatorname{tg} u = + \frac{AB}{(1 - B^2)} + \frac{\pm \sqrt{B^2 \cos^2 z' + A^2 - \cos^2 z'}}{1 - B^2} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Digitized by Google

Da wir $z = 90^0$ angenommen, so ist r bedingt und zwar nach Cassini

$$r = 32' 20''.$$

Für z' und r' können wir noch jede Refraction nehmen, Cassini nahm, wie schon erwähnt

$$z' = 80^0, r' = 5' 28''$$

und damit wird nach (5)

$$A = \frac{\cos(32' 20) - (\cos 5' 28'')}{\sin (5' 28'')} \sin 80^0$$

wofür wir, da r und r' klein sind, daher in

$$\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r'} = -\frac{2 \sin \frac{1}{2}(r + r') \sin \frac{1}{2}(r - r')}{\sin r'}$$

die Sinuse mit den Bögen vertauschen können

$$\frac{\cos r - \cos r'}{\sin r'} = -\frac{r^2 - r'^2}{2r'}$$

setzen dürfen; dadurch wird:

$$A = -\frac{(32' 20'')^2 - (5' 28'')^2}{10' 56''} \sin 80^0$$

$$= -0{,}026609$$

$B = \frac{r}{r'} \sin z'$ gesetzt, wird $= +5{,}82478$ und für u ist nur ein reeller positiver Werth

$$= 2^0\, 0'\, 12''$$

möglich, $\sec u - 1 = x$ wird $= 0.0006115$ und da Cassini den Halbmesser der Erde $= 3271600$ Toisen annahm, wird die Höhe der Atmosphäre $x = 2000{,}7$ Toisen, oder in runder Zahl 2000.

Die scheinbare Zweideutigkeit von dem Winkel u in (7) verschwindet durch folgende Betrachtungen:

Weil r die Horizontalrefraction bezeichnet ist $r' < r$, daher $\cos r - \cos r'$, mithin auch A in (5) negativ. Ebenso ist, weil die Sinuse der Zenithdistanzen geringer wachsen, als die Refractionen, B positiv und > 1, mithin $1 - B^2$ negativ.

Es lässt sich leicht beweisen, dass schon von einigen Minuten Höhe

$$\cos^2 z' > A^2 \qquad \text{ist}^1)$$

also auch $(B^2 - 1) \cos^2 z' > A^2 B^2 - A^2$

oder $B^2 \cos^2 z' + A^2 - \cos^2 z' > A^2 B^2$

---

[1]) $\cos^2 z' > A^2$ oder $\cos z' > A$ lässt sich dadurch leicht beweisen, dass man $r = c \operatorname{tg} z$, die approximative Refractionsformel, wie wir später sehen werden, setzt. Nämlich für A seinen Werth gesetzt giebt:

$$\cos z' > \frac{r^2 - r'^2}{2r'} \sin z'$$

für $r' = c \operatorname{tg} z'$ gesetzt, kömmt

$\cos z' > \frac{r^2}{2c} \cos z'$, oder $1 > \frac{r^2}{2c}$, r ist wie wir gesehen 32' 20'', höchstens 35', also $r^2 = 0{,}0001$, mithin, sobald $2c > 0{,}0001$ oder $> 20''$, c also $> 10''$ ist, findet es statt. Bis $z = 80^0$ ist $c = 58''$, bei $z = 89^0$ ist $c = 25''$, bei $z = 89^0\, 40'$ ist $c = 11''$. Bei $z = 90^0$ ist $\cos z = A$, sonst immer grösser.

Digitized by Google

folglich $$\frac{\sqrt{B^2 \cos^2 z' + A^2 - \cos^2 z'}}{1 - B^2} > \frac{AB}{1-B^2}$$

Daraus folgt, dass der Werth von tg u, wie er es nach der Definition von u sein muss, nur dann positiv ist, wenn für

$$\frac{\sqrt{B^2 \cos^2 z' + A^2 - \cos^2 z'}}{1 - B^2}$$

der positive Werth genommen wird. Nehmen wir also für die Wurzel die positive, so muss, da nach dem obigen $1 - B^2$ negativ ist, das negative Zeichen gewählt werden, so dass man hat

$$\operatorname{tg} u = + \frac{AB}{1-B^2} - \frac{\sqrt{B^2 \cos^2 z' + A^2 - \cos^2 z'}}{1 - B^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

Wir haben u gefunden und x, aus (2) findet sich für $z = 90^0$, $E = 87^0\,59'\,48''$ und nach (1) mit $r = 32'\,20''$

$$n = \frac{\sin (88^0\,32'\,8'')}{\sin (87^0\,59'\,48'')} = 1.000284.$$

Nachdem diese Grössen bekannt sind, ist es leicht, nach (1) und (2) Tafeln zu entwerfen. Es ist in aller Strenge aus (1) und (2):

$$r = \arcsin\left(\frac{n \sin z}{1+x}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin z}{1+x}\right)$$

Setzt man aber, um alles so viel als möglich durch Tangenten auszudrücken,

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} u}{\cos z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

dann ist mit Hilfe von (2)

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin z \sin N}{\operatorname{tg} u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und erlaubt man sich den $\cos r = 1$, den $\sin r$ mit r zu vertauschen, welches für Cassini's nur ganze Secunden angebenden Tafeln hinreichend ist, so hat man leicht aus (1)

$$r = (n - 1) \operatorname{tg} E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Um z. B. r für $z = 60^0$ zu berechnen, ist:

$\lg \operatorname{tg} u = 8.54380$	$\lg \sin N = 8.84377$	$\lg \operatorname{tg} E = 0.23750$	
$\lg \cos z = 9.69897$	$\lg \sin z = 9.93753$	$\lg (n-1) = 1.76871$	in Secunden.
$N = 4^0\,0',1$	8.78130	$r = 101'',4.$	
	$\lg \operatorname{tg} E = 0.23750$		

Laplace hat, wie wir später sehen werden, bewiesen, dass bis zu 74 Grad Zenithdistanz das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft auf die Refraction gar keinen Einfluss hat. Cassini nahm eine falsche Dichtigkeit der Luft an, dessen ungeachtet stimmen seine Tafeln bis 80 Grad Zenithdistanz mit den spätern von Bradley und Laplace bis auf wenige Secunden überein. Es lässt sich in der That die Cassini'sche Form leicht in die von Bradley angewandte Simpson'sche Regel und auch in die Formel von Laplace für die Refraction von $z = 0$ bis $z = 74^0$ verwandeln.

Die Simpson'sche Regel hat von Bradley die Form erhalten:

$$r = \alpha \operatorname{tg} (z - mr)$$

Digitized by Google

wo $\alpha = 2\frac{n-1}{n+1}$ ist.

Nach unserer Gleichung (1) ist

$$n = \frac{\sin(E+r)}{\sin E},$$

also: $$n-1 = \frac{\sin(E+r)-\sin E}{\sin E} = \frac{2\cos(E+\frac{1}{2}r)\sin\frac{1}{2}r}{\sin E}$$

$$(n+1) = \frac{\sin(E+r)+\cos E}{\sin E} = \frac{2\sin(E+\frac{1}{2}r)\cos\frac{1}{2}r}{\sin E}$$

mithin $$\frac{n-1}{n+1} = \operatorname{cotg}(E+\tfrac{1}{2}r)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r$$

oder da r immer klein ist, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r$ gesetzt werden kann:

$$2\frac{n-1}{n+1} = r\operatorname{cotg}(E+\tfrac{1}{2}r), \quad \text{woraus}$$

$$r = \alpha\operatorname{tg}(E+\tfrac{1}{2}r). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Aus (2) ist

$$\sin E = \sin z\cos u$$
$$= \sin z - 2\sin^2\tfrac{1}{2}u\sin z.$$

Wir wissen bereits aus dem Frühern, dass E und z nicht sehr verschieden sind, ihre Differenz beträgt bei $z = 70^0$ nur 5', das zweite Glied ist daher ein Glied zweiter Ordnung und der Fehler wird nicht gross sein, wenn wir darin statt (12) substituiren

$r = \alpha\operatorname{tg} z$, wodurch

$\sin z = \frac{r}{\alpha}\cos z$ wird.

Dies eingesetzt, kömmt

$$\sin E = \sin z - r\frac{2\sin^2\frac{1}{2}u}{\alpha}\cos z.$$

Nennen wir

$$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}u}{\alpha} = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so haben wir

$$\sin E = \sin z - rm\cos z$$

für das wir schreiben können, da rm immer klein ist

$$\sin E = \cos rm\sin z - \sin rm\cos z,$$

oder $$\sin E = \sin(z - mr)$$
$$E = z - mr.$$

Dies in (12) substituirt giebt

$$r = \alpha\operatorname{tg}(z - [m-\tfrac{1}{2}]r)$$

und m aus (13) bestimmt ist $= 2{,}1$, daher

$$r = \alpha\operatorname{tg}(z - 1.6r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)\ ^1)$$

die gewünschte Form.

Ausdrücklich bemerke ich noch, dass für $z > 80^0$ der Coefficient von r rechts ein anderer wird. Es ist nach Cassini's Theorie, wie ich gefunden:

---

[1]) Delambre schlägt in seiner „Astronomie théorique Tom I. pag. 299" einen viel weitläufigeren, allerdings etwas strengern Weg ein, und findet $m - \frac{1}{2} = 1.6081$.

Digitized by Google

bei $z = 90^0 \quad r = \alpha \operatorname{tg}(z - 3.2r)$
$z = 80 \quad r = \alpha \operatorname{tg}(z - 1.6r)$
$z = 70 \quad r = \alpha \operatorname{tg}(z - 1.6r)$ u. s. w.

Bei Cassini ist $\alpha = 58''.70.$
Bradley hatte $\alpha = 57$ und
$r = \alpha \operatorname{tg}(z - 3r)$

und die nahe Uebereinstimmung beider Formeln ist der Grund, warum die Cassini'schen Tafeln für ihre Zeit so vorzüglich waren.

Nach Laplace ist bis zu $z = 74^0$

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \left(1 + \alpha - \frac{x - \frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 z}\right)$$

wo x die Höhe der Atmosphäre und α durch

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha}}$$

gegeben ist. Es ist daher:

$$2\frac{n-1}{n+1} = 2\frac{1 - \sqrt{1-2\alpha}}{1 + \sqrt{1-2\alpha}} = \frac{2\alpha + \alpha^2 + \ldots}{2 - \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 \ldots} = \alpha + \alpha^2 + \ldots$$

mithin statt (12):

$$r = \alpha(1 + \alpha) \operatorname{tg}(E + \tfrac{1}{2}r).$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist

$$\operatorname{tg}(E + \tfrac{1}{2}r) = \operatorname{tg} E + \frac{\frac{1}{2}r}{\cos^2 E} \ldots = \operatorname{tg} E + \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)\operatorname{tg} E}{\cos^2 E} + \ldots$$

Aus (9) und (10) findet sich leicht, dass genähert ist:

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin z}{\cos z + \frac{x}{\cos z}} = \operatorname{tg} z \left(1 - \frac{x}{\cos^2 z} \ldots\right),$$

und diesen Werth in

$$r = \alpha(1+\alpha) \operatorname{tg}(E + \tfrac{1}{2}r) = \alpha \operatorname{tg} E \left(1 + \alpha + \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+2\alpha)}{\cos^2 E} \ldots\right)$$

eingesetzt, giebt:

$$r = \alpha \operatorname{tg} z \left(1 - \frac{x}{\cos^2 z} \ldots\right)\left(1 + \alpha + \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+2\alpha)}{\cos^2 z + 2x + x^2} \ldots\right)$$

$$= \alpha \operatorname{tg} z \left(1 + \alpha + \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 z} - \frac{x}{\cos^2 z} \ldots\right)$$

$$= \alpha \operatorname{tg} z \left(1 + \alpha - \frac{x - \frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 z} \ldots\right)$$

die obige Laplace'sche Form.

Man sieht also, dass, wenn die Constanten genau genug bestimmt sind, die Cassini'schen Tafeln bis zu $z = 74^0$ mit den Laplace'schen übereinstimmen müssen.

Cassini hatte im Anfange drei Tafeln, ähnlich wie Riccioli, und zwar für den Sommer, die Aequinoctialzeiten und den Winter mit den Horizontalrefractionen von 32′ 20″, 32′ 40″ und 33′ 0″ und den Refractionen 59″, 66″, 73″ in 45° Höhe, er hat sich die Differenzen nicht zu erklären gewusst und nachdem Richer im Jahre 1671 nach Cayenne geschickt wurde, und dort

Digitized by Google

die Schiefe der Ekliptik zu 23° 29′, wie Cassini es nach seinen Berechnungen wollte, (nach Tycho's Beobachtungen und seinen Refractionstafeln sollte sie 23° 31′,5 betragen) bestimmte, auch dort fand, dass die Sonnenparallaxe [1]) sehr gering sei, adoptirte Cassini nur eine Tafel, welche die erste von den dreien war. Man findet diese Tafel lange Zeit in der Connaissance des temps, in den frühern Lehrbüchern der Astronomie und andern Büchern. Aus den Tables astronomiques du Soleil, de la Lune etc. par M. Cassini, Paris MDCCXL pag. 152 entnehme ich sie hier im Auszuge.

Tafel der Refractionen von Cassini.

Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.
0°	32′ 20″	19°	2′ 49″	37°	1′ 18″	55°	0′ 41″	73°	0′ 18″
1	27 56	20	2 39	38	1 15	56	0 40	74	0 17
2	21 4	21	2 31	39	1 12	57	0 38	75	0 16
3	16 6	22	2 25	40	1 10	58	0 37	76	0 14
4	12 48	23	2 18	41	1 7	59	0 35	77	0 13
5	10 32	24	2 12	42	1 5	60	0 34	78	0 12
6	8 55	25	2 6	43	1 3	61	0 33	79	0 11
7	7 44	26	2 0	44	1 1	62	0 31	80	0 10
8	6 47	27	1 55	45	0 59	63	0 30	81	0 9
9	6 4	28	1 51	46	0 58	64	0 28	82	0 8
10	5 28	29	1 46	47	0 56	65	0 27	83	0 7
11	4 58	30	1 42	48	0 54	66	0 26	84	0 6
12	4 32	31	1 38	49	0 52	67	0 25	85	0 5
13	4 12	32	1 34	50	0 50	68	0 24	86	0 4
14	3 54	33	1 30	51	0 49	69	0 22	87	0 3
15	3 38	34	1 27	52	0 47	70	0 21	88	0 2
16	3 24	35	1 23	53	0 45	71	0 20	89	0 1
17	3 11	36	1 20	54	0 43	72	0 19	90	0 0
18	3 0								

Der Zeitgenosse von Cassini, Picard, dem man die erste genaue Gradmessung der Erde verdankt, war es, der erkannte, dass die Refraction sich mit den Temperaturen der Luft ändere, und schon pag. 32 ist erwähnt, dass er fand, die Refraction sei im Winter grösser, als im Sommer, in der Nacht grösser, als am Tage. Er machte eine Reise nach Uranienburg bei Copenhagen, und auf der Retourreise bestimmte er in Montpellier durch Sonnenbeobachtungen die Refractionen von 68 Grad bis 90 Grad 10 Minuten Zenithdistanz. Die Tafel kann man nachschlagen in Delambre's histoire de l'astronomie moderne Tom II. pag. 618.

[1]) R. Grant in seiner „History of Physical Astronomy, London 1852" meint, dass Cassini anfangs geglaubt habe, die Differenz der Sonnenparallaxe in den verschiedenen Jahreszeiten könne die Differenz in den Refractionstafeln erklären; dies scheint mir kaum möglich, denn Cassini hat durch seine Tafeln gezeigt, dass er zu richtige Begriffe von dem wahren Werthe der Sonnenparallaxe habe. Es scheint mir hinreichend zu sein, dass Cassini zuerst, durch die Beobachtungen geleitet, drei verschiedene Refractionstafeln annahm; woher die Differenz kam, wusste er nicht, und dass er, als Richer in Cayenne seine Sommer-Tafeln bestätigte, von dieser Zeit an nur diese annahm, finde ich ganz in der Ordnung.

Digitized by Google

§. 10.

Das Mariotte'sche Gesetz. Experimente von Hawksbee, Joh. Cassini, Delisle. Newton erklärt die Refraction durch Attraction. Halley publicirt nach Newton's Theorie Tafeln, er schlägt eine Correction der Refraction durch die verschiedenen Barometerhöhen vor. Lemonnier findet Unterschiede in der Refraction, die die Temperatur hervorbringt und beobachtet zur Bestimmung der Refraction Circumpolarsterne.

Torricelli hatte das Barometer erfunden, Pascal zeigte, dass man mit ihm Höhen bestimmen könne, doch hierzu war es nöthig, dass man das Gesetz der Dichtigkeit der Luft für die verschiedenen Höhen kenne. Dieses Gesetz wurde durch den zu St. Martin sous Beaune in der Nähe von Lyon lebenden Physiker und Mechaniker Edm. Mariotte (gest. 1684) entdeckt. Durch eine grosse Anzahl von Experimenten fand er, dass die Dichtigkeit der Luft dem darauf ruhenden Drucke proportional sei [1]), d. h., dass die Zu- oder Abnahme der Dichtigkeit gerade in demselben Verhältniss stattfinde, als die Höhe einer ihren Druck anzeigenden Barometersäule zu- oder abnimmt.

Dieses Gesetz ist von Dulong und Arago geprüft worden und bei constanter Temperatur bis zu 27 Atmosphärendruck als richtig befunden, für stärkern Luftdruck findet es nicht mehr statt; bei der Refraction haben wir es nur mit etwas mehr als einer Atmosphäre und mit weniger zu thun, und daher ist für unsere Betrachtungen dieses Gesetz als vollkommen richtig zu betrachten.

Die Entdeckung des Gesetzes war um so wichtiger, als bald darauf Hawksbee, 1702, durch Experimente (er bediente sich eines hohlen Prisma's, in dem er die Luft verdichtete und verdünnte) nachwies, dass die brechende Kraft der Atmosphäre sich wie ihre Dichtigkeit verhalte. Aehnliche Experimente wurden von Jab. Cassini und Delisle [2]) angestellt, welche aber nicht so glücklich waren, als Hawksbee; letzterer fand bei einem Einfallswinkel von 45° die Brechung durch die Atmosphäre 45", während sie 60" beträgt. Später werden wir von diesen Gesetzen Gebrauch machen.

Dem grossen Talente Isaak Newton's, des Begründers und Reformators der physischen Astronomie und der Optik, war es vorbehalten, in der Theorie der astronomischen Strahlenbrechung den zum richtigen Ziele führenden Weg anzugeben.

In der ersten Ausgabe seiner „Principia philosophiae naturalis" im Jahre 1687 zeigte er, dass die Refraction nach der von ihm begründeten Emanations-

---

[1]) Nach Lindenau's barometrischen Tafeln soll schon früher Townley dieses Gesetz entdeckt haben.

[2]) Mémoires de l'Academie. Paris 1719.

Digitized by Google

theorie des Lichtes eine Folge der Attraction sei, mittelst der Attraction lasse sich die wahre Bahn des Lichtstrahls in den Luftschichten von verschiedener Dichtigkeit bestimmen und dadurch könne man den Betrag der Refraction ermitteln. Durch den von Baily im Jahre 1835 veröffentlichten Briefwechsel zwischen Newton und Flamsteed wissen wir, dass Newton die Temperatur der Luft als gleich, und ihre Dichtigkeit daher dem Drucke proportional annahm, dass er die richtige Differentialgleichung für die Refraction gefunden und sie durch die im dritten Bande seiner Principia angegebene parabolische Quadratur integrirt hat.

Halley hatte in den Philosoph. Transact. No. 366 pag. 118 Refractionstafeln nach Newton's Theorie berechnet gegeben, ohne die Formeln hinzuzufügen, erst durch die Newton'schen Briefe an Flamsteed sind die Formeln aufgeklärt, und Biot hat in der Connaissance des temps pour 1839 die von Halley publicirten Tafeln einer strengen Prüfung unterworfen und richtig befunden; ein Gleiches thut Ivory in den Philosoph. Transact. von 1838 und die nahe Uebereinstimmung mit den jetzigen strengern Tafeln ist so gross, dass es bedauert werden muss, Newton's Arbeit nicht früher bekannt gemacht zu sehen.

Halley's [1]) Tafeln geben die Horizontalrefraction 33′ 45″
die Refraction in 10° Höhe 4 52
in 45 „ 0 54

Halley beobachtete in den Jahren 1714 und 1715 den Sirius im Meridian und bemerkte, dass die Höhe um 8″ hin und her schwankte, er schrieb dies der Refraction zu, und da er gleichzeitig bemerkt hatte, dass der Barometerstand sich von 27 auf 29 Zoll geändert habe, und die 8″ von dem Betrage der Refraction, 1′ 55″ in 25° Höhe etwa, ebenso den 14. Theil ausmachten, wie die Aenderung der Barometerhöhe von der ganzen Höhe, so schloss er daraus, dass die Aenderung der Refraction der Barometerhöhen-Aenderung proportional sei, und schlug vor: „Die mittlere Refraction um denselben Theil „zu vergrössern oder zu verkleinern, als das Barometer über oder unter „seinem mittlern Stande, den Unterschied in Theilen der mittlern Höhe aus„gedrückt, sich befindet."

Lemonnier beobachtete α Aurigae zu Paris in der obern und untern Culmination und fand die Refraction in der Höhe von

4° 44′	am 14. Juli 1738	bei	20	Grad Wärme	9′ 47″
„	5. August „	„	24	„ „	9 20
„	4. Febr. 1739 „	„	5	„ „	10 31
„	„ „	„	−10	„ „	11 15

Durch diese Beobachtungen war also wieder festgestellt, dass auch die Refraction sich durch die Temperatur und zwar ganz beträchtlich ändere, es folgte, dass sowohl zu verschiedenen Jahreszeiten, wie in verschiedenen Gegenden eine andere mittlere Refraction stattfinden müsse; Lemonnier hatte

[1]) Philosophic. Transact. for 1721 und in einem Werke von Horsley.

Digitized by Google

dies auch 1737 in Torneå bemerkt, wo er die Refraction beträchtlich grösser als zu Paris fand. — Aber bei diesen Thatsachen blieb Lemonnier stehen, er gab keine Regel für die Verbesserung durch die Temperatur, das geschah erst 1753 durch den deutschen Astronomen Tobias Meyer.

Die Horizontalrefraction findet Lemonnier geringer als Cassini, Newton und Flamsteed, er will nur 31′ 27″ dafür annehmen. Er glaubte eine unvergleichlich genaue Methode gefunden zu haben, die Horizontalrefraction an einem Sterne zu bestimmen, der nur einige Grade unter den Nordhorizont hinabsinkt. α Lyra geht z. B. für Paris nur $2^1/_2{}^0$ unter den Horizont, und er findet, dass der Ort des Aufgangs, das Azimut also, sich durch eine Minute in der Horizontalrefraction um 30′ ändern müsse. Er irrt aber, Delambre hat nachgewiesen, dass es nur 8′ sind. Auch ist Lemonnier nicht mit den Resultaten seiner unvergleichlichen Methode ans Tageslicht getreten.

§. 11.

Bouguer bestimmt Refractionen in der heissen Zone, Lacaille entwirft Tafeln auf empirischem Wege und giebt nach Halley's und Mayer's Regel die erste Correctionstafel der Refraction wegen Barometer und Thermometer. Roemer's Ideen über Refraction, Horrebow's, Wurzelbauer's und Le Gentil's Tafeln. Huyghens' Ansichten.

Nach der Theorie von Keppler und Cassini musste die Refraction auf hohen Bergen grösser sein, als am Fusse derselben, denn der Beobachter in A (s. Fig. 12) sieht den Stern S in S′, die scheinbare Zenithdistanz ist Z A S′, und die zugehörige Refraction S E S′.

Der Beobachter in B sieht den Stern in der scheinbaren Zenithdistanz S′ B Z′ und hat dieselbe Refraction. Aus dem Dreieck A B C folgt, dass W. Z A S′ = W. Z′ B S′ + W. A C B, oder, dass die erste Zenithdistanz grösser ist, als die zweite, und da beide dieselben Refractionen haben, und die Refractionen mit den Zenithdistanzen wachsen, so muss der Beobachter B auf dem Berge in derselben Zenithdistanz eine grössere Refraction haben, als der Beobachter A auf ebener Erde.

Nach dem Mariotte'schen Gesetz nimmt aber die Dichtigkeit der Luft, wenn man gleiche Temperatur voraussetzt, dem Drucke proportional zu, der Weg des Lichtes in der Atmosphäre konnte keine grade Linie mehr sein, er musste eine Curve darstellen; nach der Halley'schen Regel sollten die Refractionen sich wie die Barometerhöhen verhalten, und da bereits durch Pascal bewiesen war, dass auf Bergen das Barometer bedeutend niedriger steht, als unten, so folgte auch daraus, dass auf Bergen die Refraction geringer sein müsse.

Digitized by Google

Dieser letzten richtigen Folgerung wurde ihr Recht durch Bouguer, der von der Pariser Akademie mit Condamine nach Peru zur Ausmessung eines Erdgrades geschickt wurde.

Aus Sonnenbeobachtungen in Quito, welches 1479 Toisen über der Meeresfläche liegt, entwarf er für diesen Ort folgende Tafel, der er die Aenderung von 500 Toisen Höhenveränderung (er hatte zu diesem Zwecke auch auf dem Pichincha 527 Toisen höher, als Quito beobachtet) beifügt:

Refractionstafel von Bouguer.

Scheinbare Höhe	Refraction für Quito	Aenderung für 500 Toisen Höhenänderung	Scheinbare Höhe	Refraction für Quito	Aenderung für 500 Toisen Höhenänderung
0°	22′ 50″	1′ 42″	40°	0′ 43″	0′ 6″
1	16 48	1 34	50	0 30	0 4
2	12 40	1 20	60	0 20	0 3
3	9 53	1 7	70	0 13	0 2
4	8 11	0 56	80	0 6	0 1
5	6 52	0 48	90	0 0	0 0
10	3 28	0 26			
20	1 39	0 13			
30	1 3	0 9			

Auf dem Chimborasso in 2388 Toisen Höhe beobachtete er

in	−1° 17′	scheinbarer	Höhe	die	Refraction	= 34′ 47″
„	−1 0	„	„	„	„	30 1
„	−0 31	„	„	„	„	24 20
„	0 0	„	„	„	„	20 17
„	+1 0	„	„	„	„	14 32
„	+2 0	„	„	„	„	10 2

Auf der Insel Inca, nahe an dem Niveau des Meeres, fand er die Horizontalrefraction 27′ 0″.

Durch diese Beobachtungen war also entschieden, dass die Theorie von Cassini falsch sei, dass der Barometerstand im engsten Zusammenhange mit der Refraction stehe. Die von Bouguer gefundene Horizontalrefraction von 27′, also bedeutend kleiner, als in der gemässigten Zone, lässt einige Zweifel nicht unterdrücken. Le Gentil, der 1769 in Pondichery zahlreiche Beobachtungen und Bestimmungen der Horizontalrefraction machte, fand die in der heissen Zone wenig von der der gemässigten verschieden, und auch A. v. Humboldt giebt durch seine Beobachtungen in fast derselben Zone in Amerika sie beträchtlich grösser. Ich werde später auf diesen Gegenstand noch einmal zurückkommen.

Bouguer verificirte ferner auch, dass in den Aequatorgegenden ebenfalls die Refraction in der Nacht grösser, als am Tage sei, und zwar wegen der verschiedenen Temperaturen.

Digitized by Google

Noch einmal wagte ein Mann den Weg von Tycho zur Bestimmung der Refraction zu betreten: sich um die Theorie wenig kümmernd [1]) versuchte Lacaille auf empirischem Wege eine Refractionstafel zu entwerfen und in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1755 finden wir seine Berichte.

Zu Paris und am Cap der guten Hoffnung beobachtete er Sterne, die an beiden Orten sichtbar waren und von denen einige die Nähe des Zenith passirten, der Stern β Aurigae z. B. hat in Paris 4°, am Cap 79° Zenithdistanz, γ Sagittarii dagegen hat in Paris 79°, am Cap 4° Zenithdistanz. Sobald an beiden Orten die Refractionen dieselben sind, muss die Distanz der Sterne an beiden Orten auch dieselbe sein, und durch zahlreiche Beobachtungen ist Lacaille zu dem Resultat gekommen, dass eine Differenz allerdings existire, diese aber nur 0,026 des Betrages und zwar am Cap die kleinere sei. Er construirte eine Tafel für Paris und für das Cap, von der ersten ist ein Auszug in folgender Tabelle enthalten:

Refractionen von Lacaille.

ZenithD.	Refraction	Z. D.	Refraction	Z. D.	Refraction	Z. D.	Refraction
0°	0″.0	10°	11″.7	40°	55″.8	70°	2′ 54″.7
1	1.1	15	17.8	45	1′ 6.5	75	3 49
2	2.3	20	24.2	50	1 19.0	80	5 37
3	3.5	25	31.0	55	1 34.6	84	8 42
4	4.6	30	38.4	60	1 54.4		
5	5.8	35	46.6	65	2 20.5		

Diese aus mehr denn 300 Beobachtungen abgeleiteten Refractionen sind mittlere und gelten für 28 Pariser Zoll Barometerhöhe und + 10° R. Temperatur. Um aber für alle Höhen des Barometers und alle Grade des Thermometers die richtige Refraction leicht zu finden, entwirft er eine Tafel, die die Halley'sche schon oben erwähnte Regel und auch nahe die von Tobias Mayer 1753 gegebene Correction befolgt, wonach 15 Linien Barometeränderung und 10° R. Temperaturänderung die mittlere Refraction bei 28 Zoll Barometerhöhe und 10° R. Wärme um den 22. Theil [2]) ändern. Weil es vielleicht die erste bekannt gewordene Tafel ist, gebe ich davon einige Zahlen.

Oben ist das Argument die Höhe des Barometers, links die Wärme in Reaumurgraden. Die Columnen enthalten die Zahlen, die in die mittlere Refraction hineindividirt die Verbesserung der mittlern Refraction geben. + giebt eine Vergrösserung, — eine Verminderung.

---

[1]) Die zwischenliegenden, d. h. die nicht direkt beobachteten Refractionen interpolirte Lacaille nach Bernoulli's Formeln; auch für kleinere Zenithdistanzen nach der Formel $r = \alpha \operatorname{tg} z$.

[2]) Er verminderte den Factor für die Temperatur von $\frac{1}{22}$ auf $\frac{1}{27}$.

Digitized by Google

Tafel von Lacaille zur Verbesserung der Refraction.

Barometer Thermometer	27Zoll 4 L.	27 Z. 8 L.	28 Z. 0 L.	28 Z. 4 L.	28 Z. 8 L.
+ 25°	— 13	— 15	— 18	— 23	— 32
+ 20	— 16	— 20	— 27	— 40	— 76
+ 15	— 24	— 33	— 55	—149	+189
+ 10	— 42	— 85	∞	+ 85	+ 42
+ 5	+189	+149	+ 55	+ 33	+ 24
0	+ 76	+ 40	+ 27	+ 20	+ 16
— 5	+ 32	+ 23	+ 18	+ 15	+ 13

Bei 28″ 8‴ Barometerstand und 25° Wärme muss die Refraction z. B. um den 32. Theil vermindert werden; bei 80° Zenithdistanz ist sie also 5′ 37″ — $\frac{5' 37''}{32}$ = 5′ 26″.5.

Lacaille vergleicht seine Tafeln (deren Werth er zuerst auch in Logarithmen angiebt, eine Form, die jetzt am häufigsten von den Astronomen angewandt wird) noch mit denen von Halley und Flamsteed [1]), und findet seine Werthe alle grösser. In der That sind seine Werthe auch zu gross, und dies muss den Fehlern seiner Instrumente zugeschrieben werden. Auf den Unterschied seiner Refractionen in Paris und am Cap kann in Folge dessen durchaus kein grosses Gewicht gelegt werden.

Noch merkwürdig, aber seiner Zeit angemessen, sind die Ansichten von Olaus Roemer über die Refraction, die uns Horrebow in der Schrift: „Atrium Astronomiae, Havniae 1732", überliefert hat. Roemer meinte, dass die die brechende Kraft besitzende Luft eine andere Höhe habe, als die Luft, welche auf das Barometer drückt. Für erstere sei die Höhe nur 2064 Toisen, für letztere 4128 Toisen.

Drei Regeln gebe es, welche aus der Theorie der Refraction folgten: 1) Wenn das Auge des Beobachters der Oberfläche der Atmosphäre sehr nahe sei, werde es die Gegenstände wie durch eine ebene Fläche sehen, die Einfallswinkel und Zenithdistanzen würden nahe dieselben und die Refractionen am grössten sein. 2) Wenn der Beobachter im Mittelpunct der Atmosphäre sei, sehe er keine Refraction, und 3) in dem Zwischenraume sehe man die Refraction wachsen, je mehr man sich der Oberfläche nähere.

Horrebow zieht aus Diesem drei Schlüsse, wozu er noch Zusätze giebt: 1) Dass für jede Stadt eine andere Refraction existire; im Thale sei sie geringer, als auf den Bergen. 2) Die Refractionen wüchsen, wenn die Einfallswinkel zunehmen; die drückende Kraft der Atmosphäre hänge auch von der Wärme und der Elasticität ab. 3) Die Refraction sei kleiner, je näher man

[1]) Flamsteed hat sehr starke Differenzen in den Refractionen zu verschiedenen Zeiten beobachtet. In der Historia coelestis Brittannica, Londini 1725 Vol. I. im 7. Abschnitt findet man die Beobachtungen, aus denen er eine Tafel ableitet, die eine Horizontalrefraction von 33′ 0″, eine in 45° Höhe von 48″ enthält.

Digitized by Google

dem Mittelpunct der Atmosphäre sei, grösser, je mehr man sich der Oberfläche nähere.

Aus Beobachtungen der Circumpolarsterne und der Sonne in den Solstitien leitete er eine Refractionstafel für Roemer's Sternwarte zu Tusculum (nahe bei Copenhagen auf dem Lande) ab mit 82″ Refraction in 45° Höhe, und eine andere für den astronomischen Thurm in Copenhagen und die Uranienburg (trotz der verschiedenen Höhen! doch sagt er, erforderten Picard's Beobachtungen in Uranienburg dieselben Tafeln wie für Copenhagen) mit 33′ 44″ für 0° Höhe und 58″ für 45° Höhe. Ebenso wie Roemer war auch Wurzelbauer, geb. 1651, gest. 1725, ein Nürnberger Astronom, ein Anhänger der Cassini'schen Theorie; da er sich aber grundsätzlich keines Fernrohrs zu seinen Beobachtungen bediente, waren seine beiden Refractionen, die er seinen Tafeln zu Grunde legte, sehr irrig. Mit 30′ 28″ Refraction in 0° Höhe und 5′ 10″ in 17° Höhe findet er 96″ in 45° Höhe.

Einer kurzen Erwähnung bedarf hier noch der Zeitgenosse von Roemer, Huyghens; in seinem „Traité de la lumière" pag. 42—48 erklärt er die astronomische Refraction durch seine Hypothese der Wellentheorie; die Luft wird dünner, je höher man steigt, die Welle, die unter einem bestimmten Winkel die Atmosphäre trifft, wird durch die dichtern Schichten mehr aufgehalten, als durch die dünnern, es entstehen eine Menge Particularwellen, und ihre gemeinschaftliche Tangente an der Oberfläche der Erde bestimmt die letzte Tangente der Curve, welche durch den Mittelpunct der einzelnen Wellen gelegt werden kann, und die dem Lichtwege in der Atmosphäre entspricht. Die Refraction, sagt er noch, beträgt etwa $^1/_2$ Grad, sie ist aber besonders in den Höhen unter 2 und 3 Grad sehr veränderlich, welches von der verschiedenen Menge von Wasserdämpfen herkömmt, die von der Erde aufsteigen.

Schon haben wir in diesem Paragraph von Le Gentil gesprochen, er hat 1769 in Pondichery, auf der Isle de France, und auch in Frankreich in der Normandie beobachtet und Refractionstafeln [1]) entworfen. Obgleich er nach Picard, nach Halley, nach Lemonnier, Bouguer, Lacaille, Mayer, Bradley lebte, und diese alle festgesetzt hatten, dass die Refraction mit dem Barometerstande und der Temperatur veränderlich sei, spricht er selbst bei der Verschiedenheit seiner Horizontalrefractionen auch nicht ein einziges Mal von diesen Correctionen. Er ist noch, obwohl zu seiner Zeit alle Astronomen die Simpson'sche Regel oder die Bradley'schen Tafeln adoptirt hatten, ein warmer Verehrer von Cassini, und um seine Horizontalrefraction von 29′ 44″ und die Refraction von 4′ 43″ in 80 Grad Zenithdistanz, wie er sie in Pondichery beobachtete, mit Cassini's Hypothese in Einklang zu bringen, nimmt er die

[1]) Die Refractionstafel, hergeleitet aus den Beobachtungen in der Normandie, vergleicht Delambre von 10° Höhe an mit den neuern Tafeln nach der Laplace'schen Theorie und findet, dass sie besser übereinstimmen, als die Bradley'schen. Es ist dabei aber nicht Rücksicht genommen, dass Bradley's Tafeln für 29,6 engl. Zoll Barometerstand, die neuern Tafeln dagegen für 0,76 Meter gelten.

[2]) De la Hire, Tabulae astronomicae Parisiis MDCCII pag. 6.

Digitized by Google

Höhe der brechenden Luft nur 1750 Toisen (statt 2000) für die heisse Zone an. Ein besonderes Verdienst von ihm ist, dass er in Pondichery oft aussergewöhnliche Refractionen beobachtete; so z. B. sah er im Winter von seiner 14,9 Meter hohen Sternwarte, für die die Depression des Horizontes 8′ 52″ betragen sollte, sie nur 7′ 27″, die Sonne ging nicht regelmässig auf dem Meereshorizonte auf, sie erschien plötzlich bei ihrem Aufgange einige Minuten über dem Horizonte, und ähnliche Erscheinungen nahm er wahr.

§. 12.

Versuche, die Curve des Lichts in der Atmosphäre zu bestimmen, die Arbeiten von De la Hire, Herrmann, Newton, Brooke Taylor, J. Cassini, Bouguer, Jacob, Johann und Daniel Bernoulli.

Nachdem das Mariotte'sche Gesetz bekannt war und man wusste, dass die Luft, je höher man hinaufsteigt, immer mehr an Dichtigkeit abnahm, das Licht also nicht durch eine Luftschicht von constanter, sondern durch eine unzählige Anzahl concentrischer Schichten von wachsender Dichtigkeit ging, sah man wohl ein, dass der Weg der Strahlen in der Luft eine Curve sein müsse, und wer hätte nicht versucht, diese Curve zu bestimmen?

De la Hire, der mit Picard die Messung des Erdgrades unternahm, der der Meinung Picard's zuwider die Refractionen für alle Zeiten gleich hielt und der aus seinen eigenen Beobachtungen, ebenso wie 50 Jahre später Lacaille, auf empirischem Wege eine Refractionstafel [1]) construirte, die für den Horizont 32′ 0″, für 45° Höhe 71″ (also mehr als 10″ fehlerhaft) angiebt, untersucht in den Memoiren der Pariser Akademie von 1702 den Weg des Lichtes in der Atmosphäre.

Mariotte und andere Physiker, sagt er, haben gefunden, dass die Luft sich in dem Verhältniss comprimire, als sie belastet sei; die Dichtigkeit der Luft nimmt daher ab mit dem Quadrat [2]) der Höhe und die Linie, die der Lichtstrahl beschreibt, ist in ihrem Zusammenhange eine Cycloide, von der nur der Erzeugungskreis, je nach dem Winkel, unter dem der Strahl auf die Atmosphäre fällt, verschieden ist. Fällt der Strahl als Tangente auf die Atmosphäre, so muss der Durchmesser des Erzeugungskreises die Höhe der Atmosphäre sein. Fällt er senkrecht, so ist der Durchmesser unendlich und die Cycloide geht über in die grade Linie. Doch, fügt er hinzu, wäre die Curve nur dann eine Cycloide, wenn die parallelen Luftschichten von graden Flächen begrenzt sind, denn diese Graden sind die Basen der Cycloide. Weil aber, streng genommen, die Luftschichten concentrisch um die runde Erde

[1]) De la Hire, Tabulae astronomicae Paris. MDCCII pag. 6.

[2]) Dieser Schluss ist falsch.

Digitized by Google

liegen, so ist dadurch eigentlich die Lichtcurve eine Epicycloide, die indessen die Haupteigenschaften mit der Cycloide gemein hat.

Herrmann, Professor zu Basel, zeigte 1706 in den „Actis Eruditorum", dass der Schluss von de la Hire, dass die Dichtigkeit in dem Quadrat der Höhe [1]) abnehme, nicht richtig sei, er setzte als Curve der Dichtigkeit die logarithmische Linie von der Gleichung

$$-ydx = ady$$

woraus:

$$y = e^c e^{-\frac{x}{a}}$$

wo e die Basis des hyperbolischen Logarithmensystems ist, aber das Problem zu lösen, gelang ihm auch nicht.

Newton, über dessen vorzügliche Arbeit wir schon im vorigen Paragraph gesprochen haben, war viel zu vorsichtig, um über den Weg des Lichtes etwas Falsches zu geben, es ist durch den erwähnten Briefwechsel zwischen ihm und Flamsteed erwiesen, dass er die richtige Differentialgleichung der Refraction und auch der Curve, wenn auch nicht in der jetzigen analytischen Bezeichnung, unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit dem Drucke, die brechende Kraft der Dichtigkeit proportional sei, gekannt hat.

Im Jahre 1715 fand zuerst Brooke Taylor in seiner „Methodus incrementorum" unter den eben bei Newton angeführten Bedingungen analytisch die Differentialgleichung, hält aber die Berechnung einer Refractionstafel für zu unbequem und erst Kramp war vor 60 Jahren der Erste, der die Möglichkeit der vollständigen Lösung zeigte und gab.

Taylor nahm an, dass die Geschwindigkeit des Lichtes sich verhalte, wie die Grössen $\sqrt{1+\varrho} : \sqrt{1+\varrho'}$, wenn ϱ und ϱ' die Dichtigkeiten der Atmosphäre an zwei bestimmten Puncten bezeichnen, und umgekehrt wie die auf die Tangenten, die in diesen Puncten an die Refractionscurve gezogen werden, errichteten Perpendikel. Plana [2]) hat nachgewiesen, dass seine Differentialgleichung vollkommen strenge ist.

Jacob Cassini gab 1714 [3]) dem Lichte in der Luft eine kreisförmige Bahn, und obwohl er wusste, dass diese Bahn nicht die richtige sei, beruhigte er sich doch damit, dass er fand, seine Refractionen stimmten viel besser, als die seines Vaters, und die Höhe der Atmosphäre betrage nach dieser Hypothese 4000 Toisen.

Im Jahre 1729 publicirte Bouguer [4]), von dem wir schon gesprochen, eine Abhandlung über die Refraction, die von der Pariser Akademie gekrönt wurde. Er setzt voraus, dass sich in der Atmosphäre die brechende Materie je höher man steigt, immer mehr ausbreite.

---

[1]) Wenn wirklich die Dichtigkeit mit dem Quadrat der Höhe abnähme, wäre die Curve doch keine Cycloide, sondern ein Kegelschnitt.

[2]) Plana in den Turiner Memoiren Vol. XXXII pag. 61, worin er nachweist, dass Matthieu sich irrt, wenn er in der Note zu Delambre's histoire de l'astron. au XVIIIième Siècle die Differentialgleichung nicht strenge nennt.

[3]) Mémoires de l'Academie.. Paris 1714.

[4]) Bouguer: Méthode d'observer exactement sur mèr la hauteur des astres. Paris 1749.

Digitized by Google

Damit die Lösung allgemein sei, stellt er die Ausdehnung durch eine Curve dar, deren Ordinaten der Ausdehnung proportional sind, er setzt sie auf der Oberfläche der Erde in A (s. Fig. 13) gleich 1 in der Entfernung CP (= x) vom Mittelpunct gleich z. Die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich wie diese Ordinaten, also sin W.CpL : sin W.Cpl = z : z' oder da pC gemeinschaftliche Hypotenuse ist,

$$CL : Cl = z : z'$$

woraus, wenn wir von einer Luftschicht zur andern bis A gehen, CL : CM = z : 1 wird, daher ist

$CL = CM.z = cz$, wenn wir $CM = c$ setzen, und dann ist $PL = \sqrt{x^2 - c^2z^2}$.

W. LPl ist gleich dem Differential der Refraction $= dr = \frac{LH}{PL}$ und LH = dem Differential von CL, oder da $CL = c.z$ ist, wird

$$LH = c\,dz \text{ und } dr = \frac{LH}{PL} = \frac{c\,dz}{\sqrt{x^2 - c^2z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Differentialgleichung ist ganz allgemein und identisch mit denen von Lambert, Lagrange etc. welche sich § 15 und 16 finden.

Bouguer setzt nun $z = x^m$ und findet:

$$dr = \frac{mcx^{m-2}\,dx}{\sqrt{1 - c^2x^{2m-2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, construirte er ihn durch eine Figur und fand, dass man ihn auch mit einer Sinustafel berechnen könne, sobald man m und den grössten Werth von x kenne. Er entwickelt ihn auch in eine Reihe und findet die Form:

$$r = \frac{g}{h}\,tg\,z - \frac{g^2}{2h}\,tg^3z + \frac{g^3}{6h}\left\{3tg^5z + tg^3z\right\} - \ldots,$$

wo z die Zenithdistanz, g und h Constanten bedeuten.

Er bestimmt die Constanten aus zwei Refractionen, aus 33' 0" und 2' 12" für 0° und 26° Höhe und findet $\frac{1}{h} = 0{,}14694$, $g = 0{,}00213312$. Er giebt Tafeln, die wegen der nicht ganz richtigen zweiten Refraction zu gross sind, und seine Tafeln für Quito hat er auch nach dieser Theorie berechnet.

Du Sejour stellte zuerst durch die Simpson'sche Regel, von der wir gleich nachher sprechen werden, die Bouguer'schen Refractionen dar und meint, dass sie die Aufmerksamkeit der Astronomen verdienen. Delambre beweist in seiner „histoire de l'astronomie au dixhuitième siècle" durch Rechnung, dass Bouguer auf ganz verschiedenem Wege wie Simpson zu demselben Resultat gekommen ist; Matthieu giebt in der Note zu Delambre's histoire die analytische Ableitung, denn man braucht nur Gleichung (2) zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = CP$, dem grössten Werthe von x, zu integriren, so hat man:

$$r = \frac{m}{m-1}\left\{\text{arc}\,(\sin = c.CP^{m-1}) - \text{arc}\,(\sin = c)\right\},$$

wo $c = \sin z$, dem Sinus der Zenithdistanz ist, welches nichts andres als die Simpson'sche Regel im folgenden Paragraph ist. Die Simpson'sche Regel

Digitized by Google

zeichnet sich durch ihre grosse Einfachheit aus; hätte Bouguer sein Resultat in einer so einfachen Form geben können, so hätte man mit Recht stets von der Bouguer'schen und nicht von der Simpson'schen Regel gesprochen. Von Interesse bleibt Bouguer's Arbeit immer.

Bouguer findet noch für die Curve (Trajectorie), welche er „la solaire" nennt, die Relation

$$r = m.AE$$

d. h. die Projection der Curve auf die Erdkugel steht zur Refraction in einem constanten Verhältniss und daraus folgt, dass nach Bouguer die Refraction nahe $\frac{1}{7,8} \times$ W. E C A ist. (m ist $\frac{1}{7,8}$)

Jacob Bernoulli[1]) construirte sich die Bahn des Lichtes und fand eine logarithmische Linie, er hat ein Verfahren angegeben, die Refraction zu berechnen.

Johann Bernoulli[2]) stellt die Abnahme der Dichtigkeit graphisch durch eine Parabel und Hyperbel dar, und findet die Bahn des Lichtes von gleicher Form.

Auch Daniel Bernoulli[3]) lässt sich in seiner 1738 erschienenen Hydrodynamik darauf ein, die Refraction zu bestimmen. Er spricht von der Constitution der Atmosphäre und setzt die Dichtigkeit D der Luft in der Höhe x, x in Pariser Fussen ausgedrückt

$$D = \frac{22000}{22000 + x}$$

wo für $x = 0$, $D = 1$ genommen ist. Er nennt die unendlich kleine Differenz zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel Differentialwinkel der Refraction und setzt die Refraction gleich dem Integral aller Differentialwinkel. Er findet für Höhen über 2° 44′ und unter 2° 44′ zwei verschiedene Formeln und berechnet eine Tafel, die im Auszuge nebst einer Vergleichung mit Cassini's Tafel auch in Heinsius „de computo Refractionum astronomicarum Lipsiae 1749" sich findet. Zur Bestimmung einer Constante (des Differentialwinkels für 45°) nimmt er die Cassini'sche Refraction in 10 Grad Höhe 5′ 28″ an und ein Theil seiner Tafel ist:

Refractionstafel von Daniel Bernoulli.

Sch. Höhe	Refraction		Sch. Höhe	Refraction	
0°	34′	53″	45°	1′	3″
5	9	59	50	0	53
10	5	28	55	0	44
15	3	44	60	0	36
20	2	52	65	0	29
25	2	12	70	0	23
30	1	47	75	0	17
35	1	29	80	0	11
40	1	15	85	0	5
45	1	3	90	0	0

[1]) Jacob Bernoulli Opera II., pag. 1063.
[2]) Joh. Bernoulli Opera III., pag. 516.
[3]) Daniel Bernoulli Hydrodynamik pag. 221.

Digitized by Google

Wie schon Andre vor ihm, und zu seiner Zeit auch noch Cassini III. de Thury bemerkten, sagt er, dass die Dichtigkeit der Luft der Barometerhöhe proportional sei und die Refraction durch die Wärme der Sonne am Tage geringer sei, als bei Nacht.

Seine Voraussetzungen, sowie die seiner Vorgänger, über die Dichtigkeitsabnahme der Luft sind genügend, die Nichthaltbarkeit ihrer Theorien und die geringe Verbreitung ihrer complicirten Formeln zu erklären.

§ 13.

Simpson's Regel. — Die Formel von Bradley.

In ein neues Stadium trat die Refraction durch die Arbeit des Engländers Simpson in seiner „Mathematical Dissertation", in der er den von Newton vorgeschlagenen Weg, die Refraction als Folge der Attraction zu betrachten, verfolgte, aber nicht die Dichtigkeit dem Drucke proportional, woraus eine geometrische Progression entsteht, annahm, sondern statt der geometrisch progressiven Abnahme die arithmetisch progressive voraussetzt. Er erhielt dadurch mit der ihm von Dr. Brevis gegebenen Refraction von 1′ 30″.5 in 30° Höhe eine berechnete Horizontal-Refraction, die dem wirklichen Werthe nahe entsprach und ihm seine Hypothese als richtig erscheinen liess. Seine Regel drückt er aus: „Der Radius verhält sich zum Sinus von 86° 58′.5, „wie der Sinus der Zenithdistanz zum Sinus eines andern Bogens, „und die Differenz zwischen der Zenithdistanz und diesem Bogen „multiplicirt mit $\frac{3}{11}$ ist der Betrag der Refraction." Analytisch ausgedrückt heisst das:

$$1 : \sin 86^0\,58.5 = \sin z : \sin x$$
$$(z - x) \times \tfrac{3}{11} = r, \quad \text{dem Betrage der Refraction,}$$

oder $r = \frac{3}{11}\left\{z - \text{arc sin}\,(\sin z . \sin 86^0\,58.5)\right\} = \frac{3}{11}\left(z - \text{arc sin}\left\{\sin z \times \sin(90 - \tfrac{1}{2}.33')\right\}\right.$.

33′ war bei Simpson die Horizontal-Refraction; nehmen wir diese $= R$ und setzen $\frac{1}{2} = m$, so haben wir:

$$r = \frac{1}{m}\left(z - \text{arc sin}\left\{\sin(90^0 - mR) . \sin z\right\}\right. \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

eine Gleichung, die sich noch durch folgende Transformation in eine elegantere Form bringen lässt.

$$mr - z = -\,\text{arc sin}\left\{\sin(90 - mR) . \sin z\right\}$$
$$\sin(z - mr) = \sin z . \sin(90 - mR) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

oder da $\sin(90 - mR) =$ constans ist, welche wir c nennen wollen

$$1 : c = \sin z : \sin(z - mr), \quad \text{daraus}$$
$$\frac{1 + c}{1 - c} = \frac{\sin z + \sin(z - mr)}{\sin z - \sin(z - mr)}$$
$$= \frac{\text{tg}\left(z - \frac{mr}{2}\right)}{\text{tg}\,\frac{mr}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Digitized by Google

und da $\frac{m r}{2}$ sehr klein, so dass wir die Tangente mit dem Bogen vertauschen können, haben wir:

$$\frac{1+c}{1-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(z - \frac{m r}{2}\right)}{\frac{m r}{2}}$$

woraus (B) . . . . . $r = \text{Constans.} \operatorname{tg}\left(z - \frac{m r}{2}\right)$

eine so bequeme und hübsche Form ist, dass weder Bradley noch Maskelyne, noch Sejour, noch Boscowich, noch Groombridge und Andere daran etwas anderes zu ändern wagten, als die Constante und m.

Ausser Simpson haben besonders Boscowich und Du Sejour Beweise dieser Gleichung gegeben, ich halte mich an den ursprünglichen und gebe ihn mit geringen Aenderungen und einigen Abkürzungen.

Es sei in Figur 14 O der Mittelpunct der Erde, E A N die Oberfläche, B G die Oberfläche der Atmosphäre, B G C H eine concentrische unendlich schmale Luftschicht. Der Lichtstrahl komme in B an und beschreibe die Curve B D A, B I sei die Tangente der Curve in B, D K in D, A F in dem Puncte A auf der Oberfläche. O I, O K, O F seien Perpendickel auf diese Tangenten. Die scheinbare Zenithdistanz W. L A G = W. O A F sei = z, W. I L A = r, W. B Q G = q, W. O B I = i, W. G O B = v, W. B O D = d v, W. I B K = d r, der Radius O A = a, O B = ϱ, B C = d ϱ.

Ist die Geschwindigkeit im Puncte B = a, so wird sie durch die Anziehungskraft der Luftschichten nach dem Mittelpuncte hin vergrössert und in A sei sie g. Im Puncte D, der unendlich nahe bei B liegt, sei die beschleunigte Kraft um — d u grösser, das Minuszeichen, weil die Entfernung vom Mittelpunct der Erde abnimmt, oder weil mit zunehmender Entfernung vom Mittelpunct der Erde die Geschwindigkeit abnimmt; der mehr durchlaufene Raum ist:

$$-\tfrac{1}{2} u\, d u$$

hervorgebracht durch die Zunahme der Luft. Die Luftmenge nenne ich s, die Zunahme $\frac{1}{4}$ d s. Man hat alsdann:

$$-\tfrac{1}{2} u\, d u = \tfrac{1}{2} d s$$

folglich

$$-\int u\, d u = \int d s$$

und wenn man integrirt die Geschwindigkeit zwischen den Grenzen u und g, die Luftmenge zwischen den Grenzen o und s, so ist

$$g^2 - u^2 = 2 s$$

oder

$$(1) \ldots u = \sqrt{g^2 - 2 s}$$

Nach dem 2. Keppler'schen Gesetze beschreiben alle durch die Anziehungskraft sich bewegenden Körper in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Die Geschwindigkeiten verhalten sich daher umgekehrt, wie die vom Mittelpuncte der Tangenten, gezogen an die Puncte der Curve, wo die Geschwindigkeiten stattfinden, errichteten Perpendickel, d. h.

$$u : g = O F : O I$$

Digitized by Google

Ist (s. Fig. 15) B D = u, V A = g, so ist nach dem Gesetze:

$$\triangle OBD = \triangle OVA$$

und da

$$2\triangle OBD = BD \times OI = u \,.\, OI$$
$$2\triangle OVA = AV \times OI = g \,.\, OF$$

so entsteht daraus obige Proportion.

Es ist $OF = \sin z \times OA = a \sin z$

und

$$(2) \ldots OI = \frac{g}{u} a \sin z = \frac{g \,.\, a \sin z}{\sqrt{g^2 - 2s}}$$

und

$$(3) \ldots IB = \sqrt{\varrho^2 - \frac{a^2 g^2 \sin^2 z}{g^2 - 2s}}$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke B I O und B C D hat man

$$CD = \frac{OI \,.\, BC}{BI} = \frac{ag \sin z \, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 (g^2 - 2s) - a^2 g^2 \sin^2 z}}$$

Da nun W. B O D = d v = $\frac{CD}{OC}$ oder $\frac{CD}{OB}$ ist, so bekömmt man:

$$(4) \ldots dv = \frac{ag \sin z \, d\varrho}{\varrho \sqrt{{}^2\varrho (g^2 - 2s) - a^2 g^2 \sin^2 z}}$$

In Fig. 14 ist B I der einfallende Strahl, L A der ins Auge gelangende, die ganze Refraction = W. A L I = r. Nachdem der Strahl durch die erste Luftschicht B C G H gegangen, hat er die Richtung B K und der von B I und B K eingeschlossene Winkel I B K ist gleich dem Differential der Refraction = d r.

Es ist aber $dr = W.IBK = \frac{Ik}{BI}$

und

$$Ik = \frac{d}{ds} OI = \frac{ga \sin z \, ds}{(g^2 - 2s)^{\frac{3}{2}}}$$ mit Hülfe von (2),

folglich aus $dr = \frac{Ik}{BI}$, aus (3) für B I seinen Werth eingesetzt, wird

$$(5) \ldots dr = \frac{g \,.\, a \,.\, \sin z \,.\, ds}{(g^2 - 2s) \sqrt{\varrho^2 (g^2 - 2s) - a^2 g^2 \sin^2 z}}$$

In dieser Gleichung sind noch 2 Variable ϱ und s und wenn man die Gleichung integriren will, muss man erst die Abhängigkeit zwischen der Entfernung vom Mittelpunct ϱ und dem von der Luftmenge abhängenden s kennen. Simpson lässt, wie schon erwähnt, die Dichtigkeit der Luft in arithmetischer Progression abnehmen. Es sei δ der grösste Werth von s, also die grösste Luftmenge an der Oberfläche, h die Höhe der Atmosphäre, so setzte Simpson

$$ds : d\varrho = \delta : h$$

Dadurch wird (5)

$$(6) \ldots dr = \frac{g \,.\, a \,.\, \delta \,.\, \sin z \, d\varrho}{h (g^2 - 2s) \sqrt{(g^2 - 2s) \varrho^2 - a^2 g^2 \sin^2 z}} = dv \, \frac{\delta \,.\, \varrho}{h (g^2 - 2s)}$$

oder da $\varrho = a + h$, h aus der Dämmerung abgeleitet höchstens $\frac{1}{660}$ a ist, und setzen wir a = 1, so ist ϱ höchstens $1 + \frac{1}{660}$, genähert also $\varrho = 1$. Setzen wir g = 1, so wird $g^2 - 2s = 1 - 2s$. Wegen der geringen Höhe der Luft ist s sehr klein und $1 - 2s$ können wir nahe als constant betrachten und genähert wird sein nach (6)

$$(7) \ldots \ldots \ldots \ldots dr = dv \, \frac{\delta}{h}$$

Digitized by Google

In Fig. 16, die aus Figur 14 entnommen ist, ist

$$W.\,q = W.\,r + W.\,z \text{ und da } z \text{ constant}$$
$$dq = dr$$

Es ist auch $W.\,q = W.\,v + W.\,i$

daher $W.\,v + W.\,i = W.\,r + W.\,z$

und $W.\,v - W.\,r = W.\,z - W.\,i$

und $dv - dr = d(z - i)$

aus (7) ist $dv = \frac{h}{\delta}\,dr$

daher $\left(\frac{h}{\delta} - 1\right) dr = d(z - i)$

$$dr = \frac{\delta}{h - \delta}\,d(z - i)$$

und integrirt und zwar r zwischen 0 und r, z — i entsprechend zwischen 0 und z — i, so findet sich

$$r = \frac{\delta}{h - \delta}(z - i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aus Gleichung (2) findet sich, da:

$$\sin i = \frac{OI}{OB} \text{ (Fig. 14)}$$

$$\sin i = \frac{g \,.\, a \sin z}{\sqrt{g - 2s}} = \frac{\sin z}{\sqrt{1 - 2s}} \quad \frac{1}{1 + h},$$

da wir oben schon a und g = 1 gesetzt.

Der grösste Werth von s ist δ, setzen wir den ein, und erlauben uns

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta}} \quad \frac{1}{1 + h} = 1 - h + \delta \text{ zu schreiben,}$$

so ist:

$$\sin i = \sin z \times (1 - h + \delta)$$
$$i = \arcsin(\sin z \times [1 - h + \delta])$$
$$z - i = z - \arcsin(\sin z \times [1 - h + \delta])$$

und aus (8) wird

$$r = \frac{\delta}{h - \delta}\left\{ z - \arcsin\left\{ \sin z \times (1 - h + \delta) \right\} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Aus den angenommenen Refractionswerthen findet Simpson $\delta = 0{,}000253$ $h = 0{,}001643$, $1 - h + \delta = 0{,}998610$, für $\frac{\delta}{h - \delta} = \frac{2}{1}\frac{5}{5}\frac{3}{9}\frac{}{0}$ setzt er $\frac{2}{11}$, seine zu Grunde gelegte Horizontalrefraction ist 33′ = R. Für z = 90 nimmt (9) daher die Form an

$$R = {}^{2}/_{11}\left\{ 90^{0} - \arcsin(1 - h + \delta) \right\}$$

woraus

$$\arcsin(1 - h + \delta) = 90 - {}^{11}/_{2}\,R.$$
$$1 - h + \delta = \sin(90 - {}^{11}/_{2}\,R) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Dies endlich noch in (9) substituirt giebt wenn man $\frac{1}{2} = m$ setzt unsre unsprüngliche Formel (A):

$$r = \frac{1}{m}\left(z - \arcsin\left\{ \sin z \sin(90 - m\,R) \right\}\right.$$

Simpson fügt noch hinzu, dass die Annahme einer geometrischen Progression für die Abnahme der Dichtigkeit der Luft mit den gefundenen Constanten

Digitized by Google

eine Horizontalrefraction von 52′ gebe, von 7° Höhe sei die Abweichung nur 2″ mehr. Bei Cassini haben wir schon erwähnt, dass die Refraction in grössern Höhen als 15° unabhängig von dem Gesetz der Dichtigkeit ist und bis 7° Höhe herab ist, wie wir später sehen werden, der Einfluss gering, so dass Simpson darin Recht hat.

Unter (B) ist bereits die Bradley'sche Formel aufgeführt, Bradley änderte nur die Constanten, er setzte m = 6 und für die Constante in (B) nahm er 57″, so dass seine Formel

$$(C) \quad \ldots \quad r = 57'' \operatorname{tg} (z - 3r)$$

ist. Seine Horizontalrefraction ist 33′ 0″, und die strenge Rechnung giebt die Constanste = 56″, 956.

Zur bequemern Berechnung einer Tafel nach dieser Formel mag hier noch eine kleine Transformation [1]) derselben Platz finden:

Construirt man sich ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck (s. Fig. 17) mit den Seiten z, z — mr, und dem Winkel 90 — mR, welcher z — mr gegenüber liegt, so hat man die pag. 51 unter (a) aufgeführte Formel

$$\sin (z - mr) = \sin z \sin (90 - mR),$$

welches unsre Refractionsformel ist. Nennen wir nun die 3. Seite des spärischen Dreiecks y, so haben wir den Formeln der sphärischen Trigonometrie gemäss:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z \sin mR$$

$$\cos z = \cos y \cos (z - mr)$$

Ausserdem ist $\cos (z - mr) = \cos (z - mr)$

daher $$\frac{\cos (z - mr) - \cos z}{\cos (z - mr) + \cos z} = \operatorname{tg} (z - \tfrac{1}{2} mr) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} mr = \frac{\cos (z - mr)(1 - \cos y)}{\cos (z - mr)(1 + \cos y)} =$$

$$\frac{2 \cos (z - mr) \sin^2 \frac{1}{2} y}{2 \cos (z - mr) \cos^2 \frac{1}{2} y} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} y$$

und multipliciren wir diese Gleichung $\operatorname{tg} (z - \frac{1}{2} mr) \operatorname{tg} \frac{1}{2} mr = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} y$ mit der Gleichung (b) pag. 51 $\operatorname{cotg} (z - \frac{1}{2} mr) \operatorname{tg} \frac{1}{2} mr = \frac{1 - c}{1 + c}$, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} mr = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} y \, \frac{1 - c}{1 - c}.$$

Nun ist: $$\frac{1 - c}{1 + c} = \frac{1 - \sin (90 - mR)}{1 + \sin (90 - mR)} = \frac{1 - \cos mR}{1 + \cos mR} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} mR$$

daher

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} mr = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m R \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y$$

wofür wir setzen können

$$r = \frac{2}{m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m R \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y$$

$$= \text{Const.} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y$$

wo durch $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z \sin m R$ y gegeben ist

und diese Form ist für die logarithmische Rechnung eine sehr bequeme und brauchbare.

---

[1]) Delambre giebt diese Entwicklung, aber bedeutend weitläufiger.

Digitized by Google

§ 14.

Bradley's Tafeln, seine Correctionen wegen des Barometers und Thermometers, Tobias Mayer's Formel.

Lange Zeit haben die Bradley'schen Tafeln den Astronomen als Norm gegolten und nach den Cassini'schen waren sie lange Zeit im Gebrauch, ich gebe sie daher hier im Auszuge, man findet sie vollständig im ersten Bande der „Astronomical Observations made at the Royal Observatory at Greenwich by the Rev. James Bradley Oxford 1798" pag. XXXV.

Refractionstafel von Bradley.

Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.
0°	0′ 0″.0	35	0′ 39″.6	70° 0′	2′ 35″.5	83° 0′	7′ 21″.1
1	0 1.0	36	0 41.1	70 30	2 39.8	83 20	7 41.1
2	0 2.0	37	0 42.6	71 0	2 44.3	83 40	8 2.9
3	0 3.0	38	0 44.2	71 30	2 49.0	84 0	8 26.6
4	0 4.0	39	0 45.9	72 0	2 53.9	84 20	8 52.7
5	0 5.0	40	0 47.6	72 30	2 59.2	84 40	9 21.3
6	0 6.0	41	0 49.4	73 0	3 4.7	85 0	9 53.0
7	0 7.0	42	0 51.2	73 30	3 10.6	85 20	10 27.9
8	0 8.0	43	0 53.1	74 0	3 16.9	85 40	11 6.8
9	0 9.0	44	0 55.0	74 30	3 23.4	86 0	11 50.2
10	0 10.0	45	0 57.0	75 0	3 30.3	86 10	12 13.7
11	0 11.0	46	0 59.0	75 20	3 35.2	20	12 38.7
12	0 12.0	47	1 1.1	75 40	3 40.3	30	13 5.2
13	0 13.0	48	1 3.3	76 0	3 45.6	40	13 33.4
14	0 14.0	49	1 5.5	76 20	3 51.2	50	14 3.2
15	0 15.1	50	1 7.9	76 40	3 57.0	87 0	14 35.1
16	0 16.2	51	1 10.4	77 0	4 3.1	10	15 8.9
17	0 17.3	52	1 13.0	77 20	4 9.5	20	15 44.7
18	0 18.4	53	1 15.7	77 40	4 16.3	30	16 23.2
19	0 19.5	54	1 18.5	78 0	4 23.4	40	17 4.4
20	0 20.6	55	1 21.4	78 20	4 30.8	87 50	17 48.1
21	0 21.7	56	1 24.4	78 40	4 38.8	88 0	18 34,8
22	0 22.9	57	1 27.6	79 0	4 47.1	10	19 24.6
23	0 24.1	58	1 31.0	79 20	4 55.9	20	20 17.8
24	0 25.3	59	1 34.6	79 40	5 5.2	30	21 14.6
25	0 26.5	60	1 38.4	80 0	5 15.1	88 40	22 15.3
26	0 27.8	61	1 42.5	80 20	5 25.6	50	23 19.8
27	0 29.1	62	1 46.9	80 40	5 36.7	89 0	24 28.7
28	0 30.4	63	1 51.4	81 0	5 48.7	10	25 42.1
29	0 31.7	64	1 56.4	81 20	6 1.4	20	27 0.1
30	0 33.0	65	2 1.7	81 40	6 15.1	89 30	28 22.9
31	0 34.2	66	2 7.5	82 0	6 29.8	40	29 50.5
32	0 35.5	67	2 13.6	82 20	6 45.6	50	31 22.8
33	0 36.8	68	2 20.3	82 40	7 2.7	90 0	33 0.0
34	0 38.2	69	2 27.5	83 0	7 21.1		

Zur Verbesserung der Refraction durch die Barometerhöhe bedienten sich Bradley und seine Nachfolger der Halley'schen Regel; für das Thermometer hatte er gefunden, dass ein Grad des Fahrenheit'schen Thermometers

Digitized by Google

die Refraction um $\frac{1}{100}$ veränderte. Seine Tafeln galten für 29,6 Engl. Zoll Barometerhöhe und 50° Grad Fahrenheit des Thermometers und für die Barometer- und Thermometerstände giebt er 2 kleine Tafeln von folgender Form:

Tafel für das Barometer.

Engl. Zoll.	Factor.	Engl. Zoll.	Factor.	Engl. Zoll.	Factor.
28".0	— 0.054	29".0	— 0.020	30".0	+ 0.014
28.1	— 0.051	29.1	— 0.017	30.1	+ 0.017
28.2	— 0.048	29.2	— 0.014	30.2	+ 0.020
28.3	— 0.044	29.3	— 0.010	30.3	+ 0.024
28.4	— 0.041	29.4	— 0.007	30.4	+ 0.027
28.5	— 0.038	29.5	— 0.003	30.5	+ 0.031
28.6	— 0.034	29.6	0.000	30.6	+ 0.034
28.7	— 0.030	29.7	+ 0.003	30.7	+ 0.038
28.8	— 0.027	29.8	+ 0.007	30.8	+ 0.041
28.9	— 0.024	29.9	+ 0.010	30.9	+ 0.044
29.0	— 0.020	30.0	+ 0.014	31.0	+ 0.048

Tafel für das Thermometer.

Fahr. Grad.	Factor.	Fahr. Gr.	Factor.	Fahr. Gr.	Factor.	Fahr. Gr.	Factor.
— 8°	+ 0.145	+ 22°	+ 0.070	+ 54°	— 0.010	+ 84°	— 0.085
— 6	+ 0.140	+ 24	+ 0.065	+ 56	— 0.015	+ 86	— 0.090
— 4	+ 0.135	+ 26	+ 0.060	+ 58	— 0.020	+ 88	— 0.095
— 2	+ 0.130	+ 28	+ 0.055	+ 60	— 0.025	+ 90	— 0.100
0	+ 0.125	+ 30	+ 0.050	+ 62	— 0.030	+ 92	— 0.105
+ 2	+ 0.120	+ 32	+ 0.045	+ 64	— 0.035	+ 94	— 0.110
+ 4	+ 0.115	+ 34	+ 0.040	+ 66	— 0.040	+ 96	— 0.115
+ 6	+ 0.110	+ 36	+ 0.035	+ 68	— 0.045	+ 98	— 0.120
+ 8	+ 0.105	+ 38	+ 0.030	+ 70	— 0.050	+ 100	— 0.125
+ 10	+ 0.100	+ 40	+ 0.025	+ 72	— 0.055		
+ 12	+ 0.095	+ 42	+ 0.020	+ 74	— 0.060		
+ 14	+ 0.090	+ 44	+ 0.015	+ 76	— 0.065		
+ 16	+ 0.085	+ 46	+ 0.010	+ 78	— 0.070		
+ 18	+ 0.080	+ 48	+ 0.005	+ 80	— 0.075		
+ 20	+ 0.075	+ 50	0.000	+ 82	— 0.080		
+ 22	+ 0.070	+ 52	— 0.005	+ 84	— 0.085		

Die Anwendung ist leicht, man multiplicirt die aus der Refractionstafel genommene Refraction mit dem Decimalbruch der zu der beobachteten Barometer- oder Thermometerhöhe gehört und addirt diese Correctionen, wobei aber auf das richtige Zeichen zu achten ist.

La Bonne, ein französischer Astronom, durch den Lalande nach Bradley's Formel nur mit veränderten Constanten die Refraction berechnen liess, nimmt für die Thermometercorrection pro Grad Reaumur $\frac{1}{115}$ an, welches mit Bradley fast übereinstimmt.

Tobias Mayer nahm dagegen $\frac{1}{210}$ an, de Luc fand $\frac{1}{200}$, Lambert, Amonton, Schickburg, Saussure etc. fanden ähnliche, doch nie ganz übereinstimmende Factoren. Der Wahrheit am nächsten ist Tobias Mayer, welches folgende Zusammenstellung mit den neuesten Resultaten zeigt:

Digitized by Google

Es nahmen an für 1° R., reducirt auf 28 Zoll Par. Barometerstand und 10° Reaumur:

Bradley	0,0055
La Bonne	0,0055
Tob. Mayer	0,0046
De Luc	0,0050
Bessel	0,0043
Arago und Biot	0,0044

Der ausgezeichnete Göttinger Astronom giebt in seinen 1770 erschienenen Mondtafeln für die Refraction eine Formel, ohne den Beweis [1]) hinzuzufügen. Es lässt sich aber zeigen, dass die Formel nur ein Corollarium der Simpson'schen ist. Sie hat die Form:

$$r = \frac{70''.71.b \sin z}{(1 + 0.0046\,t)^{\frac{3}{2}}} \times \left[\sqrt{1 + \frac{(16.5 \cos z)^2}{1 + 0.0046\,t}} - \frac{16.5 \cos z}{(1 + 0.0046\,t)^{\frac{3}{2}}}\right] \quad \text{I.}$$

wo b die Barometerhöhe in Par. Zoll, z die Zenithdistanz und t die Anzahl der Reaumur'schen Grade des Thermometers bedeutet.

Setzen wir $t = 0$ und $b = 28$ Pariser Zoll, so haben wir:

$$r = 33' 0'' \sin z \times \left\{\sqrt{1 + (16.5 \cos z)^2} - 16.5 \cos z\right\} \quad \text{II.}$$

für $z = 90^0$ ist $r = 33' 0''$. Mayer hat also die Horizontalrefraction von Bradley, aber nicht gültig wie dieser für 29.6 engl. Zoll = 27.775 Par. Zoll, und für 50° Fahrenheit = 8° R., sondern für 28 Par. Zoll und 0° R. Mayer's Horizontalrefraction reducirt nach seiner Formel auf 8° R. und 27.775 Par. Zoll ist = 31' 0", also bedeutend kleiner.

Leiten wir seine Formel aus der Simpson'schen Regel ab. Die Simpson'sche Regel hat die Form:

$$\sin(z - mr) = \sin z \cos mR,$$

oder $\sin z \cos mr - \cos z \sin mr = \sin z \cos mR$ und durch $\sin z$ getheilt

$$\cos mr - \cot g\, z \sin mr = \cos mR,$$

welches quadrirt und für $\cos^2 mr$, $1 - \sin^2 mr$ gesetzt, wird:

$$1 - \sin^2 mr = 1 - \sin^2 mR + 2 \cos mR \sin mr \cot g\, z + \sin^2 mr \cot g^2 z,$$

oder $$\sin^2 mr \left\{\cot g^2 z + 1\right\} + 2 \sin mr \cos mR \cot g\, z = \sin^2 mR$$

dies, da $\cot g^2 z + 1 = \frac{1}{\sin^2 z}$ ist, mit $\sin^2 z$ multiplicirt, giebt:

$$\sin^2 mr + 2 \sin mr \cos mR \cos z \sin z = \sin^2 mR \sin^2 z.$$

$\sin mr = mr$, $\sin^2 mR = m^2R^2$ gesetzt, giebt:

$$m^2r^2 + 2mr \cos mR \cos z \sin z = m^2R^2 \sin^2 z, \quad \text{woraus}$$

$$r = R \sin z \left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos mR}{Rm} \cos z\right)^2} - \frac{\cos mR}{Rm} \cos z\right\} \quad (1)$$

folgt. m ist die Constante, die Simpson = ½, Bradley = ½ annahm; wählen wir für m den Werth 6.302 und setzen $R = 33' 0''$ geht (1) über in

$$r = 33' 0'' \sin z \left\{\sqrt{1 + (16.5 \cos z)^2} - 16.5 \cos z\right\} \text{ in die obige Formel II.}$$

[1]) Einen Beweis aus der Simpson'schen Regel giebt 1781 in einer Abhandlung der Sohn von Tob. Mayer. Er giebt auch nach den Untersuchungen von de Luc, Euler, Lambert, Lagrange, eine neue Constantenbestimmung.

Digitized by Google

Für die Aenderung der Refraction durch das Barometer adoptirte Mayer die Halley'sche Regel, er theilte den Factor 33' 0" durch 28 und hat so die Horizontalrefraction für 1 Zoll Barometerhöhe gleich 70".71. Ist b die jedesmalige Höhe des Barometers, so entspricht diesem: 70".71 . b.

Für die Temperatur hatte Mayer gefunden, dass für 1° R. sich die Luft um 0.0046 mehr ausdehne, für t-Grade also 0.0046 t mehr. Ist h die Höhe der Atmosphäre bei 0°, so wird sie daher bei t-Grade h(1 + 0.0046 t) sein.

Für diese Correction brauchen wir die Mayer'sche Formel nur genähert, können cos mR = 1 setzen und haben

$$r = R\,\frac{b}{B}\sin z\left\{\sqrt{1+\frac{\cos^2 z}{m^2R^2}}-\frac{\cos z}{mR}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

wo B = 28 Pariser Zoll bedeutet.

Nach Gleichung (9) des § 13. haben wir:

$$r = \frac{\delta}{h-\delta}\left\{z - \text{arc sin}\left[\sin z.(1-h+\delta)\right]\right\}$$

für $z = 90^0$ wird

$$R = \frac{\delta}{h-\delta}\left\{90^0 - \text{arc sin}\,(1-h+\delta)\right\} \quad \text{oder}$$

$$1-h+\delta = \sin\left(90 - \frac{h-\delta}{\delta}R\right)$$

$$= \cos\frac{h-\delta}{\delta}R$$

Quadrirt man und zieht beide Quadrate von 1 ab, so hat man

$$2h - 2\delta - h^2 - \delta^2 = \left(\sin\frac{h-\delta}{\delta}R\right)^2$$

oder genähert, wie wir es nur gebrauchen

$$R = \frac{\delta}{h-\delta}\sqrt{2h-2\delta} = \frac{\delta\sqrt{2}}{(h-\delta)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Nach Simpson ist:

$$m = \frac{h-\delta}{\delta} \qquad \text{also}$$

$$mR = \sqrt{2(h-\delta)}$$

und

$$m^2R^2 = 2(h-\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Diese Werthe aus (3) und (4) in 2 substituirt, giebt:

$$r = \frac{\delta\sqrt{2}}{(h-\delta)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{b}{B}\sin z\left\{\sqrt{1+\frac{\cos^2 z}{2(h-\delta)}}-\frac{\cos z}{\sqrt{2(h-\delta)}}\right\}$$

Setzt man statt h jetzt h (1 + 0,0046 t) und bedenkt man, dass durch eine andere Temperatur der Normalstand des Barometers B in B (1 + 0,0046 t) übergehen muss, so hat man

Digitized by Google

$$r = \frac{\delta\sqrt{2}\,.\,b\sin z}{[h(1+0{,}0046\,t)-\delta]^{\frac{1}{2}}\,B\,.\,(1{,}0046\,t)}\left\{\sqrt{1+\frac{\cos^2 z}{2[h(1+0{,}0046\,t)-\delta]}}-\frac{\cos z}{\sqrt{2[h(1+0{,}0046\,t)-\delta]}}\right\}$$

und wenn man, da δ nur etwa $\frac{1}{6}$ h ist, den Factor $1+0{,}0046\,t$ auch auf δ mit bezieht, so hat man

$$r = \frac{\delta\sqrt{2}\,b.\sin z}{(h-\delta)^{\frac{1}{2}}\,B\,.\,(1+0{,}0046\,t)^{\frac{3}{2}}}\left\{\sqrt{1+\frac{\cos^2 z}{2(h-\delta)(1+0{,}0046\,t)}}-\frac{\cos z}{\sqrt{2(h-\delta)(1+0{,}0046\,t)}^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Für $\frac{\delta\sqrt{2}}{(h-\delta)^{\frac{1}{2}}}$ und $\sqrt{2(h-\delta)}$ die numerischen Werthe der Grössen aus (3) und (4) eingesetzt,

für B = 28 Zoll

giebt endlich die Mayer'sche Formel (I):

$$r = \frac{70''.71\;b\sin z}{(1+0{,}0046\,t)^{\frac{3}{2}}}\left\{\sqrt{1+\frac{(16{,}5\cos z)^2}{1+1{,}0046\,t}}-\frac{16{,}5\cos z}{(1+1{,}0046\,t)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Die Vernachlässigungen, die wir uns erlaubt haben, sind bedeutend gross und so gross, dass die Correction wegen des Thermometers nach dieser Formel bei beträchtlicher Differenz von der mittlern Temperatur von andern Correctionstafeln Unterschiede giebt. Sehr bequem ist sie ausserdem auch nicht und zu verwundern nicht, dass sie von andern Astronomen fast niemals angewandt wurde, die Bradley'sche war sehr viel bequemer.

Die Ableitung, die wir hier aus der Simpson'schen Regel gemacht haben, lässt sich auch machen aus den jetzt kommenden Ausdrücken von Euler, und Lagrange; doch noch eine Ableitung zu geben, scheint mir überflüssig.

§ 15.

Die Arbeiten von Euler und Lambert.

Die Refraction beschäftigte im vorigen Jahrhundert nicht nur die Astronomen; die ausgezeichnesten Mathematiker haben sich fast alle daran gewagt und alle möglichen Hülfsmittel der Analyse wurden angewandt, um das Problem zu lösen. Der grosse Mathematiker, den man die verkörperte Analyse nennt, der berühmte Leonhard Euler, versucht in den Berliner Memoiren vom Jahre 1754 das Problem zu lösen, er ist so glücklich, die wirkliche Differentialgleichung der Curve des Lichtes zu finden und stellt sie zuerst in analytischer Form dar. Seine Voraussetzungen über die Abnahme der Dichtigkeit sind aber irrig und das Endresultat entspricht nicht den wahren Werthen. Er setzt das constante Verhältniss zwischen dem Sinus des Einfalls und des Brechungswinkels eines Strahles der vom leeren Raum in die Luft von der

Digitized by Google

Dichtigkeit c wie $1 : \alpha$ [1]); das für eine Luftschicht von der Dichtigkeit n c wird alsdann sein

$$1 : \alpha^{n}$$

das für eine Luftschicht von der Dichtigkeit q, da man $n = \frac{q}{c}$ setzen kann:

$$1 : \alpha^{\frac{q}{c}}$$

und das für eine Luftschicht von der Dichtigkeit r,

$$1 : \alpha^{\frac{r}{c}}.$$

Geht der Strahl von der Luftschicht q zu r, so findet danach zwischen dem Einfallswinkel und Brechungswinkel die Proportion

$$\alpha^{\frac{q}{c}} : \alpha^{\frac{r}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

statt.

Es sei wieder E A N (s. Fig. 18) ein Theil der Oberfläche der Erde, der Radius $A O = a$, die scheinbare Zenithdistanz $W. G A L = W. F A O = z$, $W. O B J = i$, $W. O D K = i - di$, $W. A O B = v$, $W. A O D = v - dv$ $O D = \varrho$, $O B = \varrho + d\varrho$.

Die Dichtigkeit der Luftschicht in D sei $= q$, in $B = q + dq$, so ist nach (1)

$$\sin 0DJ : \sin 0DK = \alpha^{\frac{q+dq}{c}} : \alpha^{\frac{q}{c}}$$

oder

$$\alpha^{\frac{q+dq}{c}} = \alpha^{\frac{q}{c}} \frac{\sin 0DJ}{\sin 0DK} = \alpha^{\frac{q}{c}} \frac{\sin (i + dv)}{\sin (i - di)} = \alpha^{\frac{q}{c}} \frac{\sin i + dv \cos i + \ldots}{\sin i - di \cos i + \ldots}$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz ist:

$$\alpha^{\frac{q+dq}{c}} = \alpha^{\frac{q}{c}} + \alpha^{\frac{q}{c}} \lg \alpha \frac{dq}{c} + \ldots\ldots$$

und dadurch wird:

$$\alpha^{\frac{q}{c}} + \alpha^{\frac{q}{c}} \lg \alpha \frac{dq}{c} + \ldots = \alpha^{\frac{q}{c}} \frac{\sin i + \cos i\, dv + \ldots}{\sin i - \cos i\, di + \ldots}$$

oder

$$1 + \lg \alpha \frac{dq}{c} = \frac{\sin i + \cos i\, dv + \ldots}{\sin i - \cos i\, di + \ldots} = 1 + \operatorname{cotg} i\, dv + \operatorname{cotg} i\, di + \ldots$$

woraus

$$\lg \alpha \frac{dq}{c} = \operatorname{cotg} i\,(dv + di). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ferner ist $B C = d\varrho$, $D C = \varrho\, dv$, daher

$$\operatorname{tg} i = \frac{\varrho\, dv}{d\varrho} \text{ und } \frac{dv}{\operatorname{tg} i} = \frac{d\varrho}{\varrho},$$

dies in (2) substituirt giebt:

$$\frac{dq}{c} \lg \alpha = \frac{di}{\operatorname{tg} i} + \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

---

[1]) α nimmt er für unsere Luft an der Oberfläche der Erde $= \frac{3324}{3325}$ an.

Digitized by Google

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\frac{q}{c} \lg \alpha = \lg \sin i + \lg \varrho + C$$

oder

$$\alpha^{\frac{q}{c}} = C \varrho \sin i$$

Um C zu bestimmen, hat man, wenn man für $\varrho = a$, $i = z$, $q = k$ setzt

$$\alpha^{\frac{k}{c}} = C a \sin z$$

also

$$C = \frac{\alpha^{\frac{k}{c}}}{a \sin z}$$ und daher

$$\alpha^{\frac{q}{c}} = \frac{\alpha^{\frac{k}{c}}}{a \sin z} \varrho \sin i$$

oder

$$a \sin z \, \alpha^{\frac{q}{c}} = \alpha^{\frac{k}{c}} \varrho \sin i$$

oder

(4) . . . . . $a \sin z = \alpha^{\frac{k-q}{c}} \varrho \sin i$

Wir hatten eben:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\varrho \, d v}{d \varrho}, \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{\varrho^2 d v^2}{d \varrho^2}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 i = \frac{1}{\cos^2 i} = \frac{d \varrho^2 + \varrho^2 d v^2}{d \varrho^2}$$

$$\frac{1}{\cos i} = \sqrt{\left(\frac{d \varrho^2 + \varrho^2 d v^2}{d \varrho^2}\right)}$$ und

$$\sin i = \frac{\frac{1}{\cos i}}{\operatorname{tg} i} = \frac{\varrho \, d v}{\sqrt{d \varrho^2 + \varrho^2 d v^2}}$$ und dies in (4) eingesetzt

giebt:

$$a \sin z = \alpha^{\frac{k-q}{c}} \varrho \frac{\varrho \, d v}{\sqrt{(d \varrho^2 + \varrho^2 d v^2}}$$

oder

$$a \sin z \, \alpha^{\frac{q-k}{c}} d \varrho \sqrt{\left(1 + \varrho^2 \frac{d v^2}{d \varrho^2}\right)} = \varrho^2 d v$$ und quadrirt

$$\varrho^4 d v^2 = a^2 \sin^2 z \, \alpha^{\frac{2q-2k}{c}} d \varrho^2 + a^2 \sin^2 z \, \alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \varrho^2 d v^2$$

oder

$$d v^2 \left\{ \varrho^4 - \varrho^2 a^2 \alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin^2 z \right\} = a^2 \sin^2 z \, \alpha^{\frac{2q-2k}{c}} d \varrho^2,$$

daraus die Quadratwurzel gezogen und geordnet, entsteht:

(5) . . . . . $d v = \frac{a \sin z \, \alpha^{\frac{q-k}{c}} d \varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - a^2 \alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin^2 z}}$

Kennt man q als Function von ϱ, so lässt sich diese Gleichung integriren und man würde die Gleichung der Curve erhalten, die das Licht beschreibt. Diese Curve gebrauchen wir aber nicht, wir wollen den Betrag der Refraction kennen, d. h. r bestimmen, und dazu müssen wir d r kennen.

Digitized by Google

Suchen wir d r zu erhalten; wir haben zu diesem Zwecke:

die Refraction $r = W.BOH - W.LAH + i$

$= i + v - z$

und $dr = di + dv$ . . . . . (6)

d v kennen wir aus (5) und aus (2) haben wir

$$di = tg\,i\,lg\,\alpha\,\frac{dq}{c} - dv$$

und da wir auch eben gehabt haben, dass

$$tg\,i = \frac{\varrho\,dv}{d\varrho} \text{ ist,}$$

so folgt

$$di = \frac{\varrho}{d\varrho}\,lg\,\alpha\,.\,\frac{dq}{c}\,dv - dv$$

also

$$dr = \frac{\varrho}{d\varrho}\,lg\,\alpha\,.\,\frac{dq}{c}\,dv$$

und für d v den Werth aus (5) gesetzt giebt

$$dr = \frac{a\,.\,\frac{dq}{c}\,lg\,\alpha\,.\,\alpha^{\frac{q-k}{c}}\,\sin z}{\sqrt{\varrho^2 - a^2\,\alpha^{\frac{2q-2k}{c}}\,\sin^2 z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

In diese Differentialgleichung bringt Euler noch den Barometerstand und die Wärmecorrection hinein, für das Gesetz der Dichtigkeit der Luft führt er das Glied einer harmonischen Reihe von der Form

$$\frac{f}{f+\varrho}$$

ein, und kömmt zuerst zu dem Resultat, dass bis zu 70 Grad Zenithdistanz die Refraction ohne merklichen Fehler der Tangente der Zenithdistanz proportional gesetzt werden kann. Für grössere Zenithdistanzen erlaubt er sich um seinen Ausdruck integrabel zu machen Näherungen zu setzen, die nicht mehr erlaubt sind, er erhält einen weitläufigen Ausdruck, der aber nicht streng genug ist, und für $z = 45^0$ die Refraction um eine volle Minute falsch giebt. Nach seinen Formeln hat niemals jemand Tafeln gerechnet und eine practische Anwendung ist nicht gemacht, sie würde auch unsichrere Werthe geben, als die viel einfachere Bradley'sche Formel.

Einen ganz andern Weg schlägt der originelle Lambert in seiner 1759 zu La Haye herausgegebenen Schrift: „Les propriétés remarquables de la route de la lumière," ein. Er verlässt den bisher eingeschlagenen Weg, er will von einer physischen Hypothese über die Dichtigkeit der Luft nichts wissen und nur von den 2 Sätzen: 1) dass das Verhältniss zwischen den Sinusen der Einfalls- und Brechungswinkel constant und 2) dass, wenn das Licht nach und nach mehrere Medien, deren Oberflächen eben und parallel sind, durchläuft, das Verhältniss zwischen dem Sinus des Einfallswinkels auf die erste Fläche und dem Sinus des Brechungswinkels aus der letzten Fläche ganz dasselbe ist, als wenn der Strahl unmittelbar vom ersten zum letzten Medium überginge, ausgehend leitet er geometrisch d. h. durch Construction die Differential-

Digitized by Google

gleichung der Refraction ab, er entwickelt den Ausdruck in eine Reihe, integrirt annähernd und schlägt vor, die Coefficienten der einzelnen Glieder, die nach Potenzen von tang z entwickelt sind, durch beobachtete Refraction zu bestimmen. Sein Gang ist folgender:

Es sei wieder wie früher (s. Fig. 19) $OA = 1$, $OD = \varrho$, W. $HAL = z$, W. $HOD = v$, W. $DOB = dv$, W. $ILA = r$, W. $IDT = dr$, W. $TDO = i$, AD sci $= x$, $DB = dx$, $OT = t$, $It = dt$, dann ist

$$OF = \sin z$$
$$AF = \cos z$$
$$TO = t = \varrho \sin i$$
$$TD = \varrho \cos i = \sqrt{\varrho^2 - t^2}$$

und (a) . . . . . $dr = \frac{dt}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$

$$= \frac{dt}{\varrho \cos i} = \frac{dt \operatorname{tg} i}{t}$$

also die Differentialgleichung der Refraction unter einer höchst einfachen Form.

Unter der Voraussetzung des Brechungsverhältnisses zwischen dem leeren Raum und der Luft zu $\frac{1}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}\frac{0}{1}$ beweist Lambert, dass der Betrag der Refraction nicht mehr als $\frac{1}{0\,0\,0\,0}$ verschieden ist von dem Quotienten:

$$\frac{FAD - DT}{OF}$$

Es ist nämlich nach (a)

$$dr = \frac{dt}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$$

oder

$$tdr = \frac{tdt}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$$

Zieht man von beiden Seiten $\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$ ab, so kömmt:

(b) . . . . . $tdr - \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}} = \frac{tdt - \varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DBC und DTO folgt:

$$BC : DB = DT : DO$$

oder $$d\varrho : dx = \sqrt{\varrho^2 - t^2} : \varrho$$

woraus $dx = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$ und dies in (b) eingesetzt, giebt:

$$tdr = dx + \frac{tdt - \varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}$$

und integrirt erhält man:

$$\int tdr = x - \sqrt{\varrho^2 - t^2} + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen ist

für $x = o$ das Integral $\int tdr$ auch $= o$, $\varrho = 1$, $t = 0F$,

daher $$o = o - \sqrt{1 - t^2} + \text{Const.}$$

also $$\text{Const.} = \sqrt{1 - t^2} = AF$$

Digitized by Google

Es wird also

$$\int t\,dr = x - \sqrt{\varrho^2 - t^2} + \sqrt{1 - t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$
$$= AD - DT + AF$$
$$= FAD - DT$$

Nach dem Brechungsverhältniss ändert sich t aber nur um $\frac{1}{6000}$; setzt man daher für t den mittlern Werth, so ist dieser

$$t = (1 + \tfrac{1}{6000})\,OF$$

und man hat statt Gleichung (c) alsdann

$$\int OF\,(1 + \tfrac{1}{6000})\,dr = FAD - DT$$

oder

$$\int_0^r dr = \frac{FAD - DT}{OF}\,(1 - \tfrac{1}{6000})$$

$$r = \frac{FAD - DT}{OF}\,(1 - \tfrac{1}{6000}) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

Um den Betrag der Refraction selbst zu finden, entwickelt Lambert die Differentialgleichung (a) nach dem binomischen Lehrsatz in eine Reihe und zwar ist nach (a)

$$dr = dt\,(\varrho^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= dt\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1 \cdot t^2}{2\varrho^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot t^4}{2 \cdot 4 \cdot \varrho^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \varrho^7} + \ldots\right) \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

wo $t = \varrho \sin i$ gesetzt ist.

Da aber der Sinus des Einfallswinkels i zum Sinus des Brechungswinkels z in einem constanten Verhältniss steht, so kann man auch setzen

$$t = P \sin z$$

wo P eine von der Höhe und Dichtigkeit der Atmosphäre abhängende Function ist. Alsdann ist

$$dt = \sin z\,dP$$

und es wird

$$dr = dP\left\{\frac{1}{\varrho}\sin z + \frac{1 \cdot P^2}{2\varrho^3}\sin^3 z + \frac{1 \cdot 3 \cdot P^4}{2 \cdot 4 \cdot \varrho^5}\sin^5 z + \ldots\right\}$$

und wenn man integrirt

$$r = \sin z \int \frac{dP}{\varrho} + \frac{1 \sin^3 z}{1 \cdot 2}\int \frac{P^2\,dP}{\varrho^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\sin^5 z \int \frac{P^4\,dP}{\varrho^5} + \ldots$$
$$= A \sin z + \frac{1}{2} B \sin^3 z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C \sin^5 z + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(f)}$$

wenn man $A = \int \frac{dP}{\varrho}$, $B = \int \frac{P^2\,dP}{\varrho^3}$, $C = \int \frac{P^4\,dP}{\varrho^5}$, etc.

setzt.

Da aber im Allgemeinen P und ϱ wenig von einander verschieden sind, so wird annähernd $A = B = C$ etc. sein und die Reihe für r wird, wenn z einer grossen Zenithdistanz angehört, nur etwas mehr convergiren, wie die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$$

Führt man aber für die Sinuse der Zenithdistanzen die Tangenten ein, so wird die Convergenz bedeutend grösser. Es ist nämlich

Digitized by Google

$$A \sin z = A \operatorname{tg} z - \frac{1}{2} A \operatorname{tg}^3 z + \frac{1.3}{2.4} A \operatorname{tg}^5 z - \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} B \sin^3 z = \quad + \frac{1}{2} B \operatorname{tg}^3 z - \frac{2.3}{2.4} B \operatorname{tg}^5 z + \ldots$$

$$+ \frac{1.3}{2.4} C \sin^5 z = \quad + \frac{1.3}{2.4} C \operatorname{tg} z^5 + \ldots \text{ etc.}$$

mithin: $$r = A \operatorname{tg} z - \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B\right) \operatorname{tg}^3 z + \frac{1.3}{2.4} (A - 2B + C) \operatorname{tg}^5 z \ldots . \quad (g)$$

Für nicht zu grosse z wird schon das erste Glied ausreichen.

Da sowohl die Höhe der Atmosphäre, als auch das Gesetz der Dichtigkeit unbekannt ist, schlägt Lambert vor, die Coefficienten durch die beobachteten Refractionen zu bestimmen. So ist z. B. A = der Refraction von 45° Zenithdistanz, weil tg z = 1 ist, der 2. Coefficient ($\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B) lässt sich dann aus der Refraction für 45° und 60° Zenithdistanz bestimmen, der 3. Coefficient endlich aus den Refractionen von 45°, 60°, 80° Zenithdistanz.

Aus 3 Refractionen von Bernoulli für 45°, 60°, 80°, findet Lambert als Beispiel:

$$r = 63'' \operatorname{tg} z - 0'',408 \operatorname{tg}^3 z + 0'',011 \operatorname{tg}^5 z$$

und für z = 70° ist das hiernach berechnete r nur $\frac{1}{2}$'' verschieden von dem was Bernoulli findet.

Eine andre hübsche Betrachtung stellt Lambert noch über den Durchschnittspunct L der Tangenten D L und A L an, dieser Punct liegt nicht für alle Refractionen gleich entfernt vom Mittelpunct der Erde. Nach Cassini's Hypothese nur allein, wonach die Lichtcurve eine gerade Linie ist, liegt L immer in der Grenze der Erdatmosphäre, also von O gleich weit entfernt. Weil aber für kleinere Zenithdistanzen die Cassini'schen Refractionen nicht sehr von der Wahrheit abweichen, so folgt daraus, dass die Curve, welche durch die für verschiedene Refractionen gültigen Puncte L gelegt werden kann, nicht sehr vom Kreisbogen abweichen müsse. Diese Eigenschaft des Punctes L giebt ein Mittel zur Hand, die Genauigkeit der beobachteten Refractionen zu prüfen. Denn man kann L construiren, indem man zuerst W. O A F = z, W. F O T = r und O T = O F × Constante (Brechungsverhältniss) macht. Die Linie F A verlängert und die Senkrechte auf OT in T haben den Durchschnittspunct L. Weil nun T L = T U cotg r ist, so ändert ein kleiner Fehler in r den Punct L sehr beträchtlich und eine falsche Refraction zwischen mehreren giebt sich in der Construction leicht zu erkennen, indem dadurch in der Curve eine Discontinuität entsteht.

Die Refraction r ist klein bei geringen Zenithdistanzen, die cotg r aber um desto grösser und die dem Kreisbogen nahe kommende Curve bestimmt sich durch die kleinen Refractionen sehr scharf. Eine kleine Unrichtigkeit der Curve macht aber, da r, dem Horizonte nahe, bedeutend grösser wird, wenig auf r aus, wenn man aus der angenommenen Curve diese Refractionen finden will, und die Curve ist daher ein Mittel die Refractionen unter 10 und 15 Grad Höhe recht genau zu bestimmen.

Zuletzt setzt Lambert noch die vom Lichte beschriebene Curve als kreis-

Digitized by Google

förmig voraus und wendet dies auf die terrestrische Refraction an; bei Behandlung dieser werde ich Gelegenheit haben darauf zurück zu kommen.

So behandelt Lambert das Problem der Refraction, er ist der erste, der aus geometrischen Betrachtungen interessante Schlüsse zieht und elegante Sätze findet: — seine Entwicklung der einfachen Differentialgleichung in eine Reihe nach Potenzen der Sinuse und Tangenten der Zenithdistanzen ist ein entschiedener Fortschritt. Er liebte überhaupt die graphischen Darstellungen, im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1779 stellt er auch die Mayer'sche Refractionsformel graphisch dar.

§ 16.

Die Arbeiten von Lagrange und Oriani.

Auch Lagrange versucht es die Refraction zu besimmen und giebt über seine Arbeiten in den Berliner Memoiren vom Jahre 1772 einen Aufsatz.

Er definirt zuerst die Refraction und glaubt, dass sie den Alten nicht bekannt gewesen sei; er bespricht das Mariotte'sche Gesetz und giebt dafür die analytische Form an, er erwähnt, dass Hawksbee im Jahre 1702 gefunden dass das Brechungsvermögen der Luft der Dichtigkeit proportional sei und nimmt das Resultat von de Luc, dass die Dichtigkeit der Luft sich bei 28 Zoll Barometerhöhe und $16\frac{3}{4}^0$ R. Wärme für 1^0 R. um $\frac{1}{215}$ ändere, als richtig an.

Weil das Gesetz der Wärmeabnahme nicht bekannt sei, müsse man zu Hypothesen seine Zuflucht nehmen, und er glaubt die Annahme, dass die Wärme der Höhe proportional abnehme, wie Einige behaupten, sei nicht richtig.

Die Differentialgleichung der Refraction leitet er ab und findet sie mit Euler identisch; setzen wir in (7) des § 15

$$u = \alpha^{\frac{q-k}{c}}$$

so dass

$$du = \frac{dq}{c} \lg \alpha . \alpha^{\frac{q-k}{c}}$$

ist, so geht die Euler'sche Gleichung in die Lagrange'sche Form

$$dr = \frac{a \sin z . du}{\sqrt{\varrho^2 - a^2 u^2 \sin^2 z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

über.

Setzt man $a = 1$, so ist $\varrho = 1 +$ Höhe der Atmosphäre. Die grösste Höhe der Atmosphäre ist aus dem Dämmerungsbogen von 18^0

$$\text{Secante } 9^0 - 1 = 0{,}0124625 < \frac{1}{80}$$

daher

$$\varrho < 1 + \frac{1}{80}$$

Digitized by Google

und setzt man $\varrho = 1 + m$ und betrachtet m als constant, so wird (1)

$$dr = \frac{\sin z \, du}{(1+m)\sqrt{1 + \frac{u^2 \sin^2 z}{(1+m)^2}}}$$

ein Ausdruck, der sich integriren lässt und

$$r + \text{Const} = \text{arc sin}\left(\frac{u \sin z}{1+m}\right) \quad \text{giebt.}$$

Zur Bestimmung der Constante ist für $r = 0$, $u = 1$, weil in $u = \alpha^{\frac{q-k}{e}}$ für $r = 0$, $\alpha = 1$ ist, daher

$$\text{Const.} = \text{arc sin}\left(\frac{\sin z}{1+m}\right)$$

mithin

(2) . . . . . $r = \text{arc sin}\left(\frac{u \sin z}{1+m}\right) - \text{arc sin}\left(\frac{\sin z}{1+m}\right)$

welches der Cassini'sche Ausdruck ist.

Die Grösse m lässt sich bestimmen aus der Horizontalrefraction. Indem Lagrange $u = 1{,}0003302$ [1]), nach den Experimenten von Hawksbee und de Luc, gültig für 28 Zoll Barometerhöhe und 10^0 R. Temperatur annimmt, hat er für $z = 90^0$ die Horizontalrefraction

$$R = \text{arc sin}\left(\frac{1{,}0003302}{1+m}\right) - \text{arc sin}\left(\frac{1}{1+m}\right)$$

und damit ist m gegeben.

Da u so wenig von der Einheit verschieden ist, so lässt sich der Ausdruck (2) nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln. Es ist

$$\text{arc sin}\left(\frac{u \sin z}{1+m}\right) = \text{arc sin}\left(\frac{\sin z}{1+m}\right) + \frac{(u-1)\frac{\sin z}{1+m}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1+m)^2}}} + \ldots .$$

mithin

$$(3) \ldots\ldots r = \frac{(u-1)\frac{\sin z}{1+m}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1+m)^2}}} + \ldots = \frac{(u-1)\sin z}{\cos z \sqrt{1 + \frac{2m+m^2}{\cos^2 z}}}$$

$$= (u-1)\,\text{tg}\, z \left(1 + \frac{2m+m^2}{\cos^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und hieraus folgt, dass, da m klein ist, für nicht zu grosse Zenithdistanzen die Refractionen den Tangenten von z proportional sind.

Die ausgeführte Integration ist nur näherungsweise; will man sie strenge ausführen, muss man in der Differentialgleichung (1) die Abhängigkeit zwischen u und ϱ kennen, das heisst das Gesetz der Dichtigkeit der Luft.

Die einfachste Voraussetzung ist, wie Simpson die Dichtigkeit in arithmetischer Progression abnehmen zu lassen. Thun wir dies, indem wir setzen

---

[1]) Dieser Werth von u ist zu gross, siehe pag. 70.

Digitized by Google

$$\frac{\varrho}{a} = u^m$$

so wird die Gleichung (1)

$$dr = \frac{du \sin z}{u^m \sqrt{1 - u^{2-2m} \sin z^2}} = \frac{d \cdot u^{1-m} \sin z}{(1-m) \sqrt{1 - u^{2-2m} \sin^2 z}}$$

und integrirt kömmt

$$r + \text{Const.} = \frac{\text{arc sin}\,(u^{1-m} \sin z)}{1-m}$$

Für $r = o$ ist $u = 1$, daher

$$\text{Const.} = \frac{\text{arc sin}\,(\sin z)}{1-m} = \frac{z}{1-m}$$

also

$$r = \frac{\text{arc sin}\,(u^{1-m} \sin z) - z}{1-m}$$

oder

$$(1-m)\, r + z = \text{arc sin}\,(u^{1-m} \sin z)$$

oder

$$\sin\left(z - (m-1)\, r\right) = u^{1-m} \sin z$$

welches, wenn man für $m - 1 = \frac{1}{2}$ setzt

$$\sin\left(z - \tfrac{1}{2} r\right) = u^{1-m} \sin z \text{ und für } z = 90^0$$

$$\sin\left(90 - \tfrac{1}{2} R\right) = u^{1-m}, \text{ daher}$$

$$\sin\left(z - \tfrac{1}{2} r\right) = \sin\left(90 - \tfrac{1}{2} R\right) \sin z$$

also die Simpson'sche Regel giebt.

Auf weitere Untersuchungen lässt Lagrange sich nicht ein, seine Differentialgleichung ist dieselbe die Euler hat, seine genäherte Integration giebt einen richtigen Ausdruck bis zu einigen 70^0 Zenithdistanz und die Ableitung der Simpson'schen Regel ist höchst einfach und elegant; an Hypothesen wagte er sich nicht, sie schienen ihm zu vage, dem Bedürfniss der Astronomie genügten auch noch die Bradley'schen Tafeln.

Noch sehen wir einen Astronomen in dem letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts sich mit der Aufgabe beschäftigen: Oriani in Mailand giebt in den Ephemerides astronomiae, Mediolani 1788 eine Erweiterung der Euler'schen und Lagrange'schen Abhandlungen, er nimmt für die Dichtigkeit das Mariotte'sche Gesetz verbunden mit der Euler'schen harmonischen Reihe für die Abnahme der Wärme an und entwickelt die Differentialgleichung in eine Reihe, deren einzelne Glieder nach einander integrirt werden. Er zeigt dadurch gewissermaassen den Weg, wie die Aufgabe behandelt werden muss und in seiner Reihenentwicklung führt er alle Integrationen zurück auf die Integration des Integrals

$$\int e^{-tt}\, dt$$

ein Integral, das bei den Theorien von Kramp, Laplace, Bessel etc. die Hauptrolle spielt und dessen vollständige Auflösung erst Kramp in seiner berühmten

Digitized by Google

Abhandlung „Analyse des refractions astronomiques" giebt; Oriani giebt aber dafür eine empirische Lösung.

In seiner Abhandlung stellt er zuerst verschiedene Formeln[1]) zur Bestimmung der Höhen mit dem Barometer zusammen und bestimmt aus den Beobachtungen der Luftschiffer Charles und Robert, aus Schuckburgh's Angaben bei der Besteigung des Berges Mole bei Genf den Coefficienten ζ der Wärmeabnahme unter der Annahme, dass das Gesetz der Temperatur von der Form

$$\frac{C}{1+\zeta x} \text{ sei,}$$

wo x die Höhe in Toisen bezeichnet, und $C = 1 + t\,\frac{1}{213}$ ($\frac{1}{213}$ ist der Ausdehnungscoefficient der Luft) für $x = 0$ ist. Er findet im Mittel

$$\zeta = 0{,}000036$$

Dann geht er zur Réfraction über, er entwickelt auf demselben Wege wie Euler und Lagrange die Differentialgleichung, er setzt für $\varrho - a$ wie Lagrange eine Constante und erhält den Lagrange'schen Werth der Gleichung (2). Er leitet ebenso wie Lagrange die Simpson'sche Regel ab und beweist, dass die von Lagrange gebrauchte Constante $u - 1 = 0{,}0003302$ viel zu gross sei, Simpson hat 0,000253, er findet 0,000277031. Hierauf entwickelt er die Differentialgleichung in eine Reihe. Nach (1) ist

$$dr = \frac{a \sin z\, du}{\sqrt{\varrho^2 - a^2 u^2 \sin^2 z}}$$

und setzen wir $\varrho = a + x$, wird:

$$(4) \ldots\ldots dr = \frac{\sin z\, du}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 - u^2 \sin^2 z}}$$

Nun ist aber:

$$\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 - u^2 \sin^2 z\right\}^{-\frac{1}{2}} = (1-u^2\sin^2 z)^{-\frac{1}{2}} \times \left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)(1-u^2\sin^2 z)^{-1}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2.2.2}\left(\frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)^2 (1-u^2\sin^2 z)^{-2} - \frac{1.3.5}{2.2.2.2.3}\left(\frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)^3 (1-u^2\sin^2 z)^{-3} + \ldots\right]$$
$$= (1-u^2\sin^2 z)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{x}{a}(1-u^2\sin^2 z)^{-1} + \frac{x^2}{2a^2}(2+u^2\sin^2 z)(1-u^2\sin^2 z)^{-2}\right.$$
$$\left. - \frac{x^3}{2a^3}(2+3u^2\sin^2 z)(1-u^2\sin^2 z)^{-3} + \ldots\right\}$$

daher

$$(5) \ldots dr = \frac{\sin z\, du}{\sqrt{1-u^2\sin^2 z}}\left\{1 - \frac{x}{a}\frac{1}{1-u^2\sin^2 z} + \frac{x^2}{a^2}\frac{2+u^2\sin^2 z}{2(1-u^2\sin^2 z)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{x^3}{a^3}\frac{2+3u^2\sin^2 z}{2(1-u^2\sin^2 z)^3} + \ldots\right\}$$

$$u \text{ ist} = \alpha^{\frac{q-k}{c}} = 1 + \frac{q-k}{c}\lg\alpha + \ldots.$$

wenn wir die Euler'sche Bezeichnung einführen.

---

[1]) Die von Schuckburgh, De Roy, De Luc.

Digitized by Google

Daraus folgt $du = \lg \alpha \frac{dq}{c}$ und in (5) eingesetzt und für

$$\frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \operatorname{tg} z$$

geschrieben, hat man leicht:

$$(6) \ldots dr = \frac{\sin z\, du}{(1 - u^2 \sin^2 z)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z}{c\, a \cos^2 z} \left\{ x\, dq - \frac{2 + \sin^2 z}{2\, a \cos^2 z} x^2\, dq + \frac{2 + 3 \sin^2 z}{2\, a^2 \cos^4 z} x^3\, dq - \ldots \right\}$$

und wenn man integrirt und im ersten Gliede $u = \alpha^{\frac{q-k}{c}}$ setzt

$$(7) \qquad r + \text{Const.} = \arcsin (\alpha^{\frac{q-k}{c}} \sin z) - \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z}{c\, a \cos^2 z} \int x\, dq + \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z\, (2 + \sin^2 z)}{2\, c\, a^2 \cos^4 z} \int x^2\, dq - \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z\, (2 + 3 \sin^2 z)}{2\, c\, a^3 \cos^6 z} \int x^3\, dq + \ldots$$

Die Bestimmung der Constante ist überflüssig, wenn wir die Integration des ersten Gliedes von der untern Grenze bis zur obern ausführen, d. h. wenn wir es als bestimmtes Integral betrachten.

Unsre Integrale gelten von $x = o$ bis $x = x$ bis zur Höhe der ganzen Atmosphäre, mithin muss auch

$$\alpha^{\frac{q-k}{c}}$$

für die ganze Atmosphäre genommen werden. Nach § 15 ist aber $q = k$ der Werth der Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche der Erde, q der entsprechende an der Grenze der Atmosphäre ist $= o$, im ersten Falle ist $\alpha^{\frac{q-k}{c}} = 1$, im andern erhalten wir $\alpha^{\frac{-k}{c}}$ statt $\alpha^{\frac{q-k}{c}}$ und wir haben statt (7):

$$(8) \ldots r = \arcsin (\alpha^{\frac{-k}{c}} \sin z) - z - \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z}{c\, a \cos^2 z} \int x\, dq + \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z\, (2 + \sin^2 z)}{2\, c\, a^2 \cos^4 z} \int x^2\, dq - \frac{\lg \alpha \operatorname{tg} z\, (2 + 3 \sin^2 z)}{2\, c\, a^3 \cos^6 z} \int x^3\, dq + \ldots$$

Jetzt sind noch aufzulösen die Integrale

$$\int x\, dq, \int x^2\, dq, \int x^3\, dq \text{ etc. etc.}$$

und zu diesem Zwecke müssen wir q als Function von x kennen.

q ist die Dichtigkeit der Luft und nennt man den Barometerstand y und steigt man um dx höher, so wird der Luftdruck um $q\, dx$ geringer, wodurch das Barometer um dy sinkt, daher ist

$$q\, dx = -dy$$

$$\text{oder} \qquad q = -\frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und vermöge dieser Gleichung lässt sich das erste Integral schon auflösen. Es ist nämlich nach der partiellen Integration

$$\int x\, dq = x\, q - \int q\, dx = x\, q + y + \text{Const.}$$

Digitized by Google

Die Grenzen des Integrals sind $x = o$, wo wir die Barometerhöhe $y = b$ setzen, und $x =$ der Höhe der Atmosphäre, wo q und $y = o$ werden, die Constante fällt durch die Grenzen fort und es ist

$$\int_0^x x\, dq = -b \quad \ldots \quad (10)$$

Das 2. Integral $\int x^2\, dq$ ist nach der theilweisen Integration

$$= x^2 q - 2\int x\, q\, dx \qquad \text{und mit Hülfe von (9)}$$

$$= x^2 q + 2xy - 2\int y\, dx \quad \ldots \quad (11)$$

Jetzt müssen wir die Abhängigkeit zwischen y und x kennen. Sind wieder die Dichtigkeit, die Barometerhöhe und die Wärme an der Oberfläche

$$k,\ b,\ C$$

in der Höhe x $\qquad q,\ y,\ T$

so haben wir, da die Dichtigkeit dem Luftdruck und der Wärme proportional ist,

$$q = \frac{k.\ C.\ y}{b.\ T} \quad \ldots \quad (12)$$

Dividiren wir mit (9) d. h.

$$q\, dx = -dy \qquad \text{und ordnen}$$

so findet sich

$$\frac{dx}{T} = -\frac{b\, dy}{k.\ C.\ y} \quad \ldots \quad (13)$$

Oriani setzt aber mit Euler:

$$T = \frac{C}{1 + \zeta x}$$

dies in (13) eingesetzt, giebt

$$(1 + \zeta x)\, dx = -\frac{b}{k}\,\frac{dy}{y}$$

und diese Gleichung integrirt, links zwischen den Grenzen $x = x$ und $x = o$, rechts zwischen $y = y$ und $y = b$, so hat man:

$$x + \tfrac{1}{2}\zeta x\, x = \frac{b}{k}(\lg b - \lg y) \quad \ldots \quad (14)$$

woraus

$$\lg y = \lg b - \frac{k}{2b}(2x + \zeta x\, x)$$

oder

$$y = b\, e^{-\frac{k}{2b}(2x + \zeta x\, x)} \quad \ldots \quad (14)$$

folgt, wo e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Setzt man

$$\frac{k}{2b\zeta}(1 + \zeta x)^2 = v^2$$

so wird

$$dx\zeta \sqrt{\left(\frac{k}{2b\zeta}\right)} = dv, \text{ oder } dx = dv \sqrt{\left(\frac{2b}{k\zeta}\right)}$$

und das Integral in (11)

$$\int y\, dx = \sqrt{\left(\frac{2b}{k\zeta}\right)}\, b\, e^{\frac{k}{2b\zeta}} \int e^{-v^2} dv \quad \ldots \quad (15)$$

Digitized by Google

Das Integral $\int e^{-v^2} dv$ hat, sagt der berühmte Italiener, selbst Euler weder durch Kunstgriffe noch durch Logarithmen noch durch eine Winkelfunction lösen können. Er, Oriani, nimmt daher zur empirischen Lösung seine Zuflucht, er construirt das Integral als Fläche, die Veränderliche x wird auf der Abscissenachse dargestellt und als Ordinate

$$y = b\, e^{-\frac{k}{2b}(2x + \zeta x^2)}$$

genommen.

Für $x = o$ ist $y = b$, für $dx = 100'$, $dx = 200'$ etc., wird das jedesmalige y welches wir y' nennen wollen, und alsdann die Fläche berechnet, die dem Parallel-Trapez angehört, dessen Grundlinie $= 100'$, dessen Höhe auf einer Seite die Ordinate y auf der andern y' ist. Oriani hat so von 100 zu 100' von $x = o$ bis $x = 30500'$ die Ordinaten berechnet und giebt dafür eine Tafel. Er findet dadurch

$$\int y\, dx = 3637\, b = \frac{122}{137}\,\frac{b^2}{k}$$

wobei er

$$\zeta = 0{,}000036,\ k = \frac{1}{10478},\ b = 28 \text{ Zoll}$$

angenommen hat. Unser 2. Integral nach (11) wird daher für die richtigen Grenzen $x = o$ und $x =$ Höhe der Atmosphäre,

$$\int x^2\, dq = x^2 q + 2xy - 2\int y\, dx = 0 + 0 - 2 \cdot \frac{122}{137}\,\frac{b^2}{k} \quad \text{oder}$$

$$\int x^2\, dq = -2F\,\frac{b^2}{k} \qquad (16)$$

wenn man den Bruch

$$\frac{122}{137} = F$$

nennt.

Auf ganz ähnliche Weise findet sich das 3. Integral

$$\int x^3\, dq = -\frac{2 \cdot 3\, b^2}{k \cdot \zeta}(1 - F) \qquad (17)$$

und die folgenden Integrale lassen sich alle auf das 2te

$$\int x^2\, dq$$

zurückführen.

Setzt man die Werthe von (10), (16) und (17) in (8) ein, so haben wir:

$$r = \arcsin\left(\alpha^{-\frac{k}{c}} \sin z\right) - z + \frac{\lg \alpha}{c}\,\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}\left(\frac{b}{a} - \frac{2F\,b^2}{a^2 k} \cdot \frac{2 + \sin^2 z}{2\cos^2 z} + \frac{2 \cdot 3 \cdot b^2}{a^3 \cdot k\,\zeta}(1 - F)\,\frac{2 + 3\sin^2 z}{2\cos^4 z} + \ldots\right) \qquad (18)$$

Digitized by Google

Entwickelt man nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so hat man noch

$$\text{arc sin}\,(\alpha^{-\frac{k}{c}}\sin z) = \text{arc sin}\left\{(1-\frac{k}{c}\lg\alpha)\sin z\right\} + \ldots$$
$$= z - \frac{k}{c}\lg\alpha\,\text{tg}\,z + \ldots.$$

und aus (18) wird:

$$(19)\quad \ldots\quad r = -\frac{k}{c}\lg\alpha\,\text{tg}\,z\left(1-\frac{b}{k\,a}\frac{1}{\cos^2 z}+\frac{2\,F\,b^2}{k^2\,a^2}\frac{2+\sin^2 z}{2\cos^2 z}\right.$$
$$\left.-\frac{2.3.b^2}{a^3\,k^2.\zeta}(1-F)\frac{2+3\sin^2 z}{\sin\cos^6 z}+\ldots.\right)$$

Bis zu 50° Zenithdistanz genügt das erste Glied und man hat, wenn die Constanten eingesetzt werden,

$$r = 0{,}00027703\,\frac{b}{28}\,\frac{1}{1+\frac{t}{215}}\,\text{tg}\,z$$
$$= \frac{b}{28}\,57''\,\frac{1}{1+\frac{t}{215}}\,\text{tg}\,z$$

wo t die Anzahl der Wärmegrade über $16\frac{1}{4}$° R., b den Barometerstand bezeichnet. Bis zu 70 Grad genügen 2 Glieder und bis dahin ist also die Refraction ganz unabhängig von dem Gesetz der Wärmeabnahme der Luft. Bis 85° genügen 3 bis 4 Glieder, über 86° convergirt der Ausdruck zu langsam und Oriani hält es für das Rathsamste, die Refractionen in diesen Höhen direct aus den Beobachtungen zu bestimmen.

So behandelt Oriani das Problem. Er giebt eine vortreffliche Erweiterung der Arbeiten von Euler und Lagrange, er findet, dass bis zu 70 Grad Zenithdistanz die Dichtigkeit der Luft ohne Einfluss auf die Refraction ist, mit Euler's Annahme der Abnahme der Wärme führt er mit allen Hülfsmitteln der Analysis, die ihm zu Gebote standen, die Rechnung durch, er kömmt durch die Reihenentwicklung auf ein bis zu seiner Zeit selbst von Euler nicht gelöstes Integral, er giebt sich die Mühe dieses Integral mechanisch zu bestimmen und bestimmt dadurch so strenge wie man nur es haben will bis zu etwa 86° Zenithdistanz die Refraction. Er genügt allen Bedürfnissen seines Zeitalters und hat durch seinen Gang den Weg gezeigt, den seine Nachfolger mit vielem Glücke verfolgten, indem sie ein Resultat geliefert haben, das noch lange den geforderten Ansprüchen genügen wird.

Digitized by Google

§ 17.

Rückblick auf das Bisherige, Stand der Refraction am Ende des 18. Jahrhunderts.

Mit Oriani's Untersuchung schliesst gewissermaassen das 18. Jahrhundert ab; Kramp's „Analyse des refractions" erschien allerdings schon 1799, sie ist aber gegen die frühern Untersuchungen ein so bedeutender Fortschritt, dass wir sie zu dem jetzigen Jahrhundert rechnen können und sie daher im 2. Theile behandeln werden. Das Bisherige lässt sich aber in Folgendem zusammen fassen.

Die Refraction und zwar die astronomische ist den Alten vielleicht bekannt gewesen, sie haben aber keine richtigen Begriffe von ihr gehabt, der erste der ein durch sie hervorgebrachtes Phaenomen richtig erklärt, ist Cleomedes und er dadurch als Entdecker anzusehen. Grosse Fortschritte in ihrer Theorie hat Ptolemäus gemacht, er hat über die Brechung des Lichts Experimente angestellt und bemüht sich schon zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel ein Gesetz zu suchen, findet es aber nicht. Er weiss, dass die Refraction der Gestirne bis zum Zenith gehen muss und nur im Zenith allein absolut 0 ist.

900 Jahre hören wir fast gar nichts von der Refraction; da schreibt mit einem Male ein Araber einen ganzen Tractat über sie: Alhazen geht in seinen Kenntnissen noch weiter als Ptolemäus und bestimmt unter anderm, was Ptolemäus für unmöglich gehalten hatte, die Höhe der Atmosphäre aus dem Dämmerungsbogen. Aber weder er noch Vitellio, der einige Jahrhunderte später lebte, fördern wesentlich die Refraction, ihr Vorhandensein war constatirt, man wusste dass kein Stern an seinem wahren Orte gesehen wurde, aber wie viel sie vom wahren Orte entfernt standen, wie sich mit zunehmender Höhe die Refraction ändert, darüber erfahren wir noch nichts und auch Roger Baco erwähnt nur der Refraction als Thatsache.

Die beobachtende Astronomie musste erst wieder zu Ehren kommen, mit Messinstrumenten musste der Himmel gemustert, die Beobachtungen so verfeinert werden, dass halbe und Viertel-Grade erkannt wurden, erst als Regiomontan der Wiederbegründer der practischen Astronomie geworden, entdeckte sein Schüler Bernhard Walther von Neuem die Refraction, er las den Sextus Empiricus, Alhazen und Vitellio und sah, dass zu deren Zeit bereits das Vorhandensein der Refraction erkannt war.

Walther wusste, dass die Refraction am Horizonte etwa einen halben Grad betrage, aber ihre eigentliche Grösse wagte weder er noch seine Zeitgenossen Wilhelm von Hessen und Maestlin genauer zu bestimmen; ersterer erfand sogar sinnreiche Methoden, sich von ihrem Einfluss unabhängig zu machen.

Mit dem grossen Tycho de Brahe beginnt gewissermaassen der erste Abschnitt der wirklichen Bestimmung der Refraction. Sich um keine

Digitized by Google

Theorie kümmernd beobachtet er mit seinen neu geschaffenen Instrumenten die Sonne und die Gestirne von ihrem Auf- bis zum Untergange, er misst scheinbare Azimute, scheinbare Höhen, scheinbare Declinationen und nimmt aus den vorhandenen Sonnentafeln die wahren Werthe, um auf trigonometrischem Wege die Grösse der Refraction zu ermitteln. Er construirt Refractionstafeln für die Sonne, für den Mond und die Fixsterne, die beiden erstern bis 45 Grad Höhe, die letztere nur bis 20 Grad Höhe gehen lassend. Der Theorie von Ptolemäus Alhazen und Vitellio ist dies aber nicht angemessen, Tycho vertauscht seine frühern richtigen Ansichten über die Ursache der Refraction mit falschen, den aufsteigenden Dünsten schreibt er die Refraction zu und meint, sie sei an verschiedenen Orten verschieden. — Landsberger, Riccioli, Hevel wagen nicht die Autorität eines Tycho anzutasten, sie folgen ihm blindlings und geben ebenso falsche Tafeln, so falsche Theorien als Tycho.

Der unsterbliche Keppler bildet den Uebergang zur 2. Periode. Er der Begründer der eigentlichen Dioptrik erkennt die das Licht brechende Atmosphäre als die wahre Ursache der Refraction, er sucht die wahre Theorie und müht sich ab, leider unglücklich, das Gesetz zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel zu finden. Er nimmt die Luft irrthümlich als unelastisch und überall von gleicher Dichtigkeit an, er adoptirt ein zusammengesetztes Gesetz für den Einfalls- und Brechungswinkel, vergleicht die für Wasser und Luft berechneten Brechungswinkel mit den von Vitellio beobachteten und findet nirgends eine grössere Differenz als ¼ Grad, welche er den Beobachtungsfehlern zuschreibt.

Er bestimmt nach seiner Theorie aus verschiedenen Tychonischen Refractionen die nöthigen Constanten und trotz ihrer Disharmonie bleibt er bei seiner Hypothese und glaubt die Nichtübereinstimmung derselben der Veränderlichkeit der Refractionen zuschreiben zu müssen. Endlich wählt er aus den Tychonischen Beobachtungen 2 Refractionen aus, bestimmt seine Constanten (die eine ist die Höhe der Atmosphäre, die er 0,48 Meilen findet) und berechnet eine Tafel, die der Tychonischen weit vorzuziehen ist, aber wegen der falschen Hypothese über das Brechungsgesetz auch sehr falsch ist.

Nach Keppler fängt die theoretische Betrachtung an vorherrschend zu werden, Scheiner, Schickard, Linnemann, Graves haben von der Refraction richtigere Begriffe; aber ihre Arbeiten sind noch unvollständig und mangelhaft und für die practische Astronomie von geringem Nutzen.

Von der grössten Wichtigkeit für die Theorie war das Gesetz, wonach Keppler so lange, so vergebens suchte, der Holländer Snellius entdeckte es, Descartes publicirte es 1637 und Cassini war der erste der davon Gebrauch machend (er fand es selbst durch Experimente) 1656 eine neue Theorie der Refraction, der Keppler'schen ähnlich, entwickelte und Tafeln berechnete, die mehr als 80 Jahre gebraucht wurden. Wie Keppler nahm er an, dass die Atmosphäre überall gleich dicht sei, er fand für ihre Höhe 2000 Toisen und für den Brechungscoefficienten zwischen dem leeren Raum und Luft 1.000284 (jetzt nimmt man 1.000294 an) und construirte eine Tafel die

Digitized by Google

bis zum Zenith ging. Anfangs hatte er 3 Tafeln für den Sommer, den Winter, den Herbst und Frühling; als aber Richer in Cayenne in der Nähe des Aequators die eine bestätigte, nahm er nur diese an. Seine Tafeln stellen die Refractionen bis nahe 80 Grad Zenithdistanz innerhalb weniger Secunden dar und der Fehler ist desshalb so gering, weil der Einfluss der Constitution der Atmosphäre auf die Refractionen bis zu 74 Grad Zenithdistanz verschwindet. Seine auf dem richtigen Brechungsgesetz beruhende Theorie kann als der 2. Abschnitt in der Entwicklungsgeschichte der Refraction angesehen werden.

Doch bald nachher entdeckte Mariotte, dass die Luft nicht überall gleich dicht sei, er fand dass sie, je höher man steigt, desto mehr an Dichtigkeit abnimmt und diese dem Drucke proportional sei, Hawksbee zeigte auf experimentellem Wege, dass die Refraction der Dichtigkeit der Luft proportional sei und daraus folgte, dass die Bahn des Lichts in der Atmosphäre keine grade Linie sein konnte.

De la Hire schreibt dem Lichte eine Cycloide, Herrmann und Jacob Bernoulli eine logarithmische Linie, Jac. Cassini eine Kreisbahn, Joh. Bernoulli eine Parabel oder Hyperbel vor, Newton, Brook Taylor, Bouguer finden die richtige Differentialgleichung. Ersterer, indem er die Temperatur als überall gleich annimmt, integrirt sie durch mechanische Quadratur, der Andere hält die Berechnung für zu schwierig und Bouguer lässt die Dichtigkeit der Luft gleichförmig abnehmen und integrirt geometrisch seinen Ausdruck, er rechnet danach Tafeln, die den damaligen Beobachtungen genügen, er weiss aber nicht, dass er sein Resultat in einer höchst einfachen Weise ausdrücken kann und ausser ihm hat fast niemand sich seiner Formeln bedient.

Nur noch Wenige halten die Cassini'sche Theorie für richtig, einer der letzten der ihr folgt ist Horrebow, der seinem Meister Roemer darin nachspricht, und ausser Wurzelbauer, der aber nur in den Anfang des 18. Jahrhunderts hinein reicht, der da glaubte sich desshalb keines Fernrohrs bedienen zu dürfen, weil dadurch eine neue Refraction, die des Glases, in die Beobachtungen hinein käme, ist Le Gentil, freilich in der letzten Hälfte des 18. Jahrhunderts, als schon längst Simpson die 3. Periode der Refraction angefangen hatte, zu nennen.

Keiner eigentlichen Theorie, sondern der empirischen Beobachtungen, und darin Tycho folgend, bedienten sich Flamsteed und Lacaille.

Auf einem ganz andern Wege als Bouguer, wenn auch unter derselben Annahme, dass die Dichtigkeit der Luft gleichförmig, der Höhe proportional abnehme, findet 1743 der Engländer Simpson eine so einfache, so elegante und dabei den damaligen Resultaten entsprechende Formel, dass sie bald darauf ganz allgemein angenommen ward. Bradley ändert die Formel noch bequemer um und bestimmt in ihr die Constanten neu, er berechnet Tafeln, welche lange gebraucht worden sind.

Schon Tycho und seine Zeitgenossen fanden, dass die Refractionen zu verschiedenen Zeiten nicht gleich waren, Keppler führt uns verschiedene

Digitized by Google

Beispiele von grossen aussergewöhnlichen Refractionen an, Scheiner's Beobachtungen zeigen ein Gleiches, Riccioli giebt für den Sommer, Winter und die Nachtgleichenzeiten verschiedene Tafeln, Cassini hat ebenfalls in seinen ersten Ephemeriden 3 verschiedene Tabellen, Picard ist aber der erste, der 1669 findet, dass der Einfluss von der Temperatur abhängig ist, de la Hire will nicht daran glauben, aber schon 1708 stellt Halley eine Regel für die Abhängigkeit der Refraction von der Barometerhöhe auf, Jac. Cassini, Cassini de Thury finden zwischen Tag und Nacht Differenzen in der Refraction, Le Monnier, sowie schwedische Astronomen finden in Torneå die Refractionen bedeutend grösser, Bouguer, der mit Condamine nach dem Aequator in Peru, um daselbst einen Erdgrad auszumessen, gesandt wird, findet sie daselbst bedeutend kleiner, Tobias Meyer ist der Erste, der für Barometer- und Thermometeränderung eine Regel angiebt und Lacaille stellt die erste Correctionstafel in den Memoiren der Pariser Akademie für 1755 auf. Es giebt noch einzelne Astronomen die selbst noch später als die eben genannten weder auf Barometer, noch auf Thermometer Rücksicht nehmen (dahin gehört z. B. Le Gentil), doch die Mayer'sche Regel oder die ausführliche Tafel von Bradley werden bald allgemeines Eigenthum.

Schätzenswerthe Beiträge zur Theorie der Refraction liefern Euler und Lambert, doch sind ihre Arbeiten unvollständig, Euler nimmt für die Abnahme der Temperatur eine Function an, die richtig angewandt ein gutes Resultat hätte geben können, aber er erlaubte sich Näherungen, die von der Wahrheit zu abweichende Resultate gaben und weil sie dessen ungeachtet doch nicht einfach waren, fast gar nicht angewandt sind. Lambert verfolgte das Problem auf dem einfachen geometrischen Wege, er legte keine Hypothese über die Dichtigkeit der Atmosphäre zu Grunde und kann daher nur genaue Resultate bis zu einer bestimmten Zenithdistanz erhalten, seine Annahme, dass die Bahn des Lichtes eine Kreisbahn sei, ist bei der terrestrischen Refraction, auf die wir zurückkommen, genähert genug, zur Berechnung der astronomischen genügt sie nicht. Seine Grenzbestimmungen zwischen denen die Refraction liegt, sind ganz vorzüglich, aber die Grenzen lassen sich ebenso wenig bestimmen, als die Bahn des Lichtes selbst, wenn man nicht zu Hypothesen seine Zuflucht nehmen will.

Seine Reihenentwicklung nach Potenzen der Tangente der Zenithdistanz sind richtig, sein Vorschlag aber, die Constanten aus den Beobachtungen zu bestimmen, ist ein empirischer Weg und alle Beobachtungsfehler bleiben. Wir haben noch die Untersuchungen von Lagrange und Oriani: die Lagrange'sche Differentialgleichung ist dieselbe, wie die Euler'sche und in den Turiner Memoiren kann man sehen, dass Plana gezeigt hat dass sie streng analytisch genommen nicht ganz richtig ist.

Lagrange discutirt, ob die Temperatur der Höhe proportional abnimmt, er ist nicht der Meinung. Auf eine höscht einfache Weise leitet er aus der Differentialgleichung sowohl die Cassini'sche Formel, als auch die Simpson'sche Regel ab. Oriani geht weiter, er legt Euler's Arbeit zu Grunde, er

Digitized by Google

nimmt wie Euler die Wärmeabnahme in der Atmosphäre nach einem bestimmten Gesetz, ausgedrückt durch das Glied einer harmonischen Reihe, an, er erlaubt sich aber nicht wie Euler so grosse Näherungswerthe, sondern entwickelt in Reihen und findet, dass die Entwicklung zu Integralen führt, die sich alle auf eins, das bis dahin noch nicht anders als durch mechanische Quadratur zu finden war, zurückführen lassen. Seine Entwicklung zeigt deutlich, dass bis zu 70 Grad Zenithdistanz das Gesetz der Wärmeabnahme gleichgültig ist, dass bis dahin die Formeln von Cassini, von Simpson oder Bradley, dass überhaupt alle Theorien dasselbe Resultat geben müssen. Bis 85 Grad will Oriani nur nach seiner Theorie die Werthe der Refraction berechnet haben, in geringeren Höhen meint er müsse man direkt die Werthe beobachten.

In der Praxis waren am Ende des Jahrhunderts die Bradley'schen Tafeln oder wenigstens die Simpson'sche Regel allgemein im Gebrauche; durfte diese aber lange im Gebrauch bleiben, da man wusste, dass sie auf einer falschen physischen Hypothese beruhte?

Nach Cassini's Theorie war die Höhe der Atmosphäre — denn nur Wenige waren der irrigen Meinung gewesen, dass die ganze Atmosphäre nicht die brechende Kraft besässe — 0,0006115 = 0,52 geogr. Meilen, nach Simpson war sie 0,001643 ≐ 1,41 geogr. Meilen, jeder aber wusste, dass die Dämmerung eine viel höhere erfordere, das Besteigen der Berge, das Aufsteigen in dem 1783 von Montgolfier erfundenen Aerostaten lehrte ebenfalls eine andere Constitution der Atmosphäre, als in dieser Regel angenommen war, Versuche neuer Theorien waren gemacht, die ersten Mathematiker hatten sich der Aufgabe gewidmet, sie aber nicht vollständig gelöst; die grossen Heroen des jetzigen Jahrhunderts nahmen sich der hinterlassenen Erbschaft an, sie förderten, sie lösten glücklich das Problem, mehrere Theorien wurden aufgestellt, die eine noch besser als die andere, und zu diesen Arbeiten wollen wir jetzt im zweiten Theile übergehen.

Digitized by Google

Digitized by Google

ZWEITER ABSCHNITT.

DIE ARBEITEN ÜBER REFRACTION

VON

KRAMP BIS JETZT.

Digitized by Google

Digitized by Google

§ 1.

Die Arbeiten auf dem Gebiete der Refraction in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts.

Es zeigte sich gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, dass die Bradley'schen Tafeln, besonders in niedrigen Höhen, doch bedeutende Fehler hatten, und hin und wieder [1]) liessen sich Stimmen hören, die die Ungenauigkeit rügten, und hervorhoben, wie sehr eine neue Theorie und genau berechnete Tafeln Bedürfniss würden.

Laplace warf zuerst in seinem Système du monde verschiedene Fragen über die Constitution der Atmosphäre und die Veränderung der Dichtigkeit auf. Man konnte von dem genialen Mathematiker erwarten, dass er diesen Gegenstand einer strengen Prüfung unterwerfen würde und als im Jahre 1799 der erste Band der berühmten „Mécanique céleste" erschien, ward diese Erwartung gesteigert und im 4. Bande derselben im Jahre 1805 gerechtfertigt. Er beweist, dass die Abnahme der Dichtigkeit in geometrischer Progression eine zu grosse, die in arithmetischer Progression eine zu kleine Horizontalrefraction liefere, die beobachtete liege genau in der Mitte, und er setzt daher für die Abnahme der Dichtigkeit eine Function, die aus beiden zusammengesetzt ist.

Aber schon 1799 hatte Kramp in Strassburg seine „Analyse des refractions" publicirt und darin die Aufgabe ausführlich und strenge behandelt. Er unterscheidet absolute Elasticität, die umgekehrt dem Raume den die Luft einnimmt proportional ist und specifische, welche gleich der absoluten, getheilt durch die Dichtigkeit der Luft, ist. Er führt, wie schon früher erwähnt, die Auflösung durch, nach der die Dichtigkeit dem Mariotte'schen Gesetze gemäss abnimmt, er entwickelt eine Refractionsformel bis zu 84 Grad Zenithdistanz und eine für Refractionen in der Nähe des Horizontes unter der Annahme, dass die Dichtigkeit durch eine Exponentialfunction dargestellt werde. Er kommt auf das Integral $\int e^{-tt} dt$, von dem er eine vollständige Auflösung

[1]) Bode's Jahrbuch für 1799, pag. 243.

Digitized by Google

und Tafeln giebt und unterwirft die Arbeiten von Euler, Bradley, Mayer, Lambert etc. einer strengern Kritik und zeigt ihre Unvollständigkeit.

In den Fundamentis astronomiae, herausgegeben 1819, entwickelt Bessel eine neue Theorie unter einer ähnlichen Annahme der Dichtigkeit der Atmosphäre wie Kramp, er legt eine Exponentialfunction zu Grunde, in der die Constanten durch die Beobachtungen bestimmt werden.

Im Jahre 1822 und 1828 publicirt Plana 2 Abhandlungen in den Turiner Memoiren, in denen er die Hypothesen von Kramp und Laplace untersucht und von der letzten zeigt, dass sie im Grunde mit einer Hypothese von Professor Leslie übereinstimme. Er giebt überall Erweiterungen, Ergänzungen, Verallgemeinerungen und zeigt die nicht völlige Strenge der von Euler, Lagrange etc. gebrauchten Differentialgleichungen.

Young untersucht in den Philos. Transactions für 1819 und 1824 die Leslie'sche Hypothese, er findet, dass sie die Horizontalrefraction um 1′ zu gross angiebt und nimmt zwischen dem Drucke und der Dichtigkeit der Luft eine andere aber ähnliche Function an und entwickelt noch besonders den Ausdruck für die Refraction in geringen Höhen.

Ivory findet die Horizontalrefractionen von Laplace und Bessel zu gross, die Bessel'schen Refractionen schliessen sich bis 85 Grad Zenithdistanz den Bradley'schen Beobachtungen an, in niedrigern Höhen sind sie aber unsicher. Er nimmt für die Abnahme der Wärme eine Function von der Form

$$1 - f(1 - e^{-u})$$

wo e die Basis des hyperbolischen Logarithmensystems, f eine Constante, u die aus Beobachtungen zu bestimmende Variable bezeichnet, an, er findet eine Höhe der Atmosphäre von etwa 5 geogr. Meilen und stellt eine von Groombridge als sicher angegebene Horizontalrefraction dar.

In den Philosoph. Transact. vom Jahre 1838 verallgemeinert er die Methode, indem er zu obiger Function noch ein Glied hinzusetzt.

Schmidt in Göttingen gab 1828 eine neue Theorie der Refraction heraus, worin er annahm, dass die Wärme abhängig ist von der Grösse

$$1 - \frac{x}{b},$$

wo x die Erhebung über der Oberfläche, b die Höhe der Atmosphäre bezeichnet. Er erhält für die Horizontalrefraction fast denselben Werth, den Ivory findet und seine Entwicklungen sind auf eine höchst elegante Weise ausgeführt.

Noch hat der Mathematiker Jöns Svanberg in Upsala im 9. und 11. Bande der „Acta Societatis Regiae Scientiarum" vom Jahre 1837 und 1839 Abhandlungen über die Refraction gegeben und, unter verschiedenen Hypothesen, den Betrag derselben hergeleitet. Sei die Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche der Erde $\varphi(o)$, in einer beliebigen Höhe x dagegen φ, so setzt Svanberg

$$\varphi = \varphi(o)\left\{1 + B\left(\frac{x}{l}\right) + C\left(\frac{x}{l}\right)^2 + D\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} e^{-A\left(\frac{x}{l}\right)}$$

Digitized by Google

wo l die Höhe der Atmosphäre bezeichnet, wenn sie eine constante Dichtigkeit hätte. Die Werthe der Constanten A, B, C, D leitet er aus den beobachteten Daten auf den Gipfeln der Berge etc. her und berechnet, unter verschiedenen Annahmen von B, C, D, die Horizontalrefraction.

In der Connaissance des temps pour 1839 und 1841 sowie in den Akademieberichten des Instituts zu Paris vom Jahre 1854, (auch Faye stellt einige Ideen auf, aus der terrestrischen Refraction die astronomische zu bestimmen, die Biot widerlegt) giebt Biot Aufsätze über die Constitution der Atmosphäre, er [1]) vergleicht die Theorien von Laplace und Ivory, er behandelt den Grad der Sicherheit, den die Tafeln von Laplace, Ivory, Bessel verdienen und stellt Vergleichungen der numerischen Werthe an.

Auch Lubbock hat 1840 und 1855 eine Theorie der Refraction gegeben und Tafeln berechnet. Er geht von einer ähnlichen Hypothese wie Ivory aus und weicht selbst in niedrigen Höhen nur wenige Secunden von Ivory ab.

In dem Folgenden werde ich auf die verschiedenen Arbeiten etwas specieller eingehen und besonders die Theorien von Laplace, Bessel, Schmidt, Ivory und Lubbock ausführlicher behandeln, auch die verschiedenen Methoden, um die Refractionen für eine andere Barometerhöhe und Wärme, als die angenommene mittlere zu finden, erörtern und in einem Anhange sämmtliche Tafeln zusammenstellen.

Doch bevor ich dazu übergehe, werde ich die Differentialgleichung, die allen Theorien gemeinschaftlich ist, und einige angewandte mathematische Theoreme, Auflösungen von Integralen etc. voraus schicken.

Auch darf bei diesem eben gegebenen kurzen historischen Ueberblick nicht vergessen werden, dass zu Anfang dieses Jahrhunderts noch oft die Bradleysche Formel gebraucht und nur die Constanten neu bestimmt wurden, Piazzi, Groombridge, Brinkley leiteten aus ihren Beobachtungen ab und zwar:

Piazzi	$r = 57,''2 \operatorname{tg}(z - 3,1289\, r)$
Groombrigde	$r = 58,1192 \operatorname{tg}(z - 3,3625\, r)$
Brinkley	$r = 56,''9 \operatorname{tg}(z - 3,2\, r)$

wo r die Refraction, z die Zenithdistanz bedeutet und die Werthe für 28 Pariser Zoll, oder 29,6 Engl. Zoll und 8° R. galten.

Carlini hat auch Tafeln gegeben, die er nach der Laplace'schen Theorie mit einigen Modificationen und veränderten Constanten berechnet hat; man findet sie in den Mailänder Ephemeriden vom Jahre 1820 und in Schumacher's Hülfstafeln.

Gauss, Brinkley, auch Littrow geben für die Refractionen in grössern Höhen statt der im Folgenden aufgeführten Formeln recht bequeme Umformungen [2]), auf die ich mich vorläufig nicht weiter einlasse, da ich sie später gelegentlich anführen werde.

---

[1]) Schon erwähnt ist, dass er Newton's Refraction mit den neuen Entwicklungen vergleicht und die von Halley publicirten Tafeln bis auf wenige Secunden richtig findet.

[2]) Vorrede zu Schumacher's Hülfstafeln.

Digitized by Google

§ 2.

Entwicklung der Differentialgleichung für die Refraction.

In § 7 des vorigen Abschnitts haben wir aufgestellt und bewiesen:

1) Geht ein Lichtstrahl von einem Medium in ein anderes über, so wird er gebrochen,
2) der gebrochene Lichtstrahl liegt mit dem einfallenden in einer Ebene,
3) der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in einem constanten Verhältniss, und hierzu fügen wir noch den 2. Erfahrungssatz aus Lambert's „Route de la lumière" hinzu, nämlich:
4) Findet zwischen 2 Medien das Brechungsverhältniss n und zwischen dem 2ten und einem 3ten das Verhältniss n' statt, so ist für das erste und dritte Medium der Brechungsexponent das zusammengesetzte Verhältniss nn'.

Es sei (Fig. 20) C der Mittelpunct der Erde, A B D ihre Oberfläche, die concentrischen Bögen[1]) die Luftschichten, der von S kommende Strahl treffe in I die n te Luftschicht, der Einfallswinkel sei i_n, der Brechungswinkel b_n, der Brechungsexponent μ_n, der für die $(n-1)$te Lusftchicht, in die der Strahl bei I angelangt μ_{n-1}, so haben wir nach unsern obigen Sätzen:

$$\sin i_n : \sin b_n = \mu_{n-1} : \mu_n$$

$$\text{W.IIK sei} = i_{n-1},\ CI = r_n,\ CI' = r_{n-1}$$

so hat man auch

$$\sin b_n : \sin i_{n-1} = r_{n-1} : r_n$$

folglich

$$\sin i_n : \sin i_{n-1} = \mu_{n-1}\, r_{n-1} : \mu_n\, r_n$$

oder

$$\mu_n\, r_n \sin i_n = \mu_{n-1}\, r_{n-1} \sin i_{n-1}$$

Ebenso ist

$$\mu_{n-1}\, r_{n-1} \sin i_{n-1} = \mu_{n-2}\, r_{n-2} \sin i_{n-2}$$

und so fort bis an die Oberfläche der Erde, wo der Brechungsexponent μ_0, $r_0 = CA = a$, $\sin i = \sin RA\dot{Z} = \sin z$ (z ist die Zenithdistanz) wird. Allgemein ausgedrückt ist das Gesetz der Refraction

(1) . . . . . $r \cdot \mu \cdot \sin i = a \cdot \mu_0 \sin z$

Der Winkel ZPR ist = W. z + W. PRA

= der Zenithdistanz + der Refraction,

die ich $\delta\theta$ nennen werde.

---

[1]) Weil die Erde keine genaue Kugel ist, sind die Luftschichten nicht ganz concentrische Kugelflächen, die Abweichung ist aber so gering, dass der Einfluss auf die Refraction ganz verschwindet. Auch ist streng genommen wegen der abweichenden Gestalt der Erde von der Kugel die Refraction in gleichen Höhen aber verschiedenen Azimuthen nicht dieselbe, doch auch diese Differenz verschwindet.

Digitized by Google

Nur für unendlich entfernte Gegenstände ist eigentlich der W. PRA gleich der Refraction, für nahe Gegenstände kömmt das Verhältniss von PA zur Entfernung dieser in Betracht. Für den Mond, weil PA so sehr gering ist, verändert dies die Horizontalrefraction aber kaum 1" [1]).

Kehren wir zu unserer Figur zurück, so ist:

$$W.\,ZPR = W.\,PIC + W.\,ICP$$

und nennen wir der Kürze wegen W. PIC = W. i, W. PCI = W. v, so ist

$$W.\,z + \delta\vartheta = W.\,i + W.\,v$$

und differentiirt

$$d(\delta\vartheta) = di + dv$$

In dem kleinen rechtwinkligen Dreieck IEI" kann man setzen

$$I''E = r\,dv,\ IE = dr$$

daher

$$\operatorname{tg} W.\,I''IE = \operatorname{tg} i = r\frac{dv}{dr}$$

oder

$$dv = \operatorname{tg} i\,\frac{dr}{r}$$

mithin

(2) . . . . . $d(\delta\vartheta) = di + \operatorname{tg} i\,\frac{dr}{r}$

Gleichung (1) in Logarithmen ausgedrückt und differentiirt giebt

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} + di\cot g\,i = 0$$

woraus

$$\operatorname{tg} i\,\frac{dr}{r} + di = -\operatorname{tg} i\,\frac{d\mu}{\mu}$$

wird, und in (2) eingesetzt, hat man:

(3) . . . . . $d(\delta\vartheta) = -\operatorname{tg} i\,\frac{d\mu}{\mu}$

Nach (1) aber ist:

$$\sin i = \frac{a\,.\,\mu_0\,.\,\sin z}{r\,\mu}$$

daher

$$\cos i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}}{\mu}$$

und

$$\operatorname{tg} i = \frac{\frac{a}{r}\mu_0 \sin z}{\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}}$$

wodurch aus (3) wird:

(A) . . . . . $d(\delta\vartheta) = -\frac{\frac{a}{r}\mu_0\,d\mu\,.\,\sin z}{\mu\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}}$

[1]) Siehe Anhang.

Digitized by Google

welches die strenge Differentialgleichung der Refraction ist, in der aber μ und r variabel sind.

Kramp, Laplace etc. entwickeln die Gleichung nach der Emanationstheorie, für welche nach § 7. des vorigen Abschnitts der Brechungsexponent:

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho}$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Luft, c die Geschwindigkeit des Lichtes, N eine Constante bezeichnet. Es ist

$$\mu_0 = \sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0}$$

$$d\mu = \frac{\frac{2N}{c^2}\, d\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho}}$$

und in (A) substituirt entsteht:

$$(B) \ldots d(\delta\vartheta) = -\frac{\frac{2N}{c^2}\, d\varrho \sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0} \cdot \frac{a}{r} \sin z}{\left(1 + \frac{4N}{c^2}\varrho\right)\sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{c^2} - \left(1 + \frac{4N\varrho_0}{c^2}\right)\frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

Setzen wir $\frac{a}{r} = 1 - s$ und $\alpha = \frac{\frac{2N}{c^2}\varrho_0}{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0}$, so wird aus (B)

$$(C) \ldots d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha \frac{d\varrho}{\varrho_0}(1 - s)\sin z}{\left\{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right\}\sqrt{\cos z^2 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

Sämmtliche 3 Gleichungen lassen nur dann eine Integration zu, wenn man die Relation zwischen μ und r oder ϱ und r kennt.

§ 3.

Ableitung der Refraction nach Cassini's, nach Simpson's, nach Newton's Hypothesen über die Dichtigkeit der Atmosphäre aus obigen Differentialgleichungen.

Cassini setzte in der Atmosphäre $\varrho = \varrho_0$, ausser der Atmosphäre $\varrho = 0$, daraus folgt, dass nur eine einmalige Brechung stattfindet und zwar an der Grenze der Atmosphäre, r ist daher constant $= a + l$, wenn wir mit l die Höhe der Atmosphäre bezeichnen. Dieser Werth für r in (A) eingesetzt und wenn wir noch einführen

$$t = \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 z \frac{a^2}{(a+l)^2}\mu_0^2}}{\mu_0 \frac{a}{a+l}\sin z}$$

Digitized by Google

wodurch

$$dt = \frac{\mu\, d\mu}{\mu_0 \frac{a}{a+l} \sin z \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2 \frac{a^2}{(a+l)^2} \sin^2 z}}$$

so erhalten wir

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\left(\frac{a}{a+l}\right)^2 \mu_0^2 \sin^2 z\, dt}{\mu^2}$$

aber es ist:

$$1 + t^2 = \frac{\mu^2}{\left(\frac{a}{a+l}\right)^2 \mu_0^2 \sin^2 z}$$

daher

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{dt}{1+t^2}$$

Zur Integration bedürfen wir der Grenzen, $\delta\vartheta$ wächst vom Anfang der Curve bis zum Ende, es ist an der Oberfläche der Erde $= 0$, an der Grenze der Atmosphäre $= \delta\vartheta$, die Grenzen sind daher 0 und $\delta\vartheta$.

Für $\delta\vartheta = \delta\vartheta$, also an der Grenze der Atmosphäre, ist $\mu = 1$, daher das dazu gehörige t, das wir t'' nennen wollen

$$t''^2 = \frac{1 - \mu_0^2 \left(\frac{a}{a+l}\right)^2 \sin^2 z}{\mu_0^2 \left(\frac{a}{a+l}\right)^2 \sin^2 z} = \frac{(a+l)^2}{a^2 \mu_0^2 \sin^2 z} - 1$$

An der Oberfläche der Erde, wo $\mu = \mu_0$, ist das zugehörige t, das wir t' nennen wollen

$$t'^2 = \frac{(a+l)^2}{a^2 \sin^2 z} - 1$$

und wenn wir daher integriren, haben wir

$$\int_0^{\delta\vartheta} \delta\vartheta = -\int_{t'}^{t''} \frac{dt}{1+t^2}$$

woraus

$$\delta\vartheta = \text{arc tg } t' - \text{arc tg } t'' = \text{arc tg } \frac{t' - t''}{1 + t' t''},$$

oder

$$\text{tg } \delta\vartheta = \frac{t' - t''}{1 + t' t''}$$

Für die Horizontalrefraction ist $\sin z = 1$, daher

$$t'^2 = \left(\frac{a+l}{a}\right)^2 - 1, \quad t''^2 = \frac{(a+l)^2}{a^2 \mu_0^2} - 1$$

Nach den Untersuchungen und Bestimmungen ist für den mittlern Barometerstand von $0^m,76$ und 0^0 Temperatur die Höhe der Atmosphäre, weil Quecksilber 10492 schwerer ist als Luft

$$l = 7974 \text{ Meter} = 0{,}0012525\, a$$

und

$$\mu_0^2 = 1{,}000588094$$

daher

$$t'^2 = 0{,}0025065 \quad t''^2 = 0{,}0019174$$

Digitized by Google

und der Horizontalrefraction

$$\delta\vartheta = 21' 32'',1$$

Also nach der Cassini'schen Hypothese kömmt eine viel zu geringe Horizontalrefraction heraus. Cassini und seine Nachfolger nahmen die Horizontalrefraction zu 32 — 34' an, die Folge davon war dass entweder die Grösse μ_0 oder l falsch gefunden wurde. Wir haben in der That gesehen, dass Cassini l nur 2000 Toisen, also kaum 4000 Meter fand.

Die Simpson'sche Theorie lässt die Dichtigkeit gleichförmig abnehmen und wir haben schon gehabt, dass sich dies ausdrücken lässt durch die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{a}{r} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^m$$

In (A) eingesetzt erhalten wir:

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\frac{\mu^m}{\mu_0^{m-1}}\, d\mu \,.\, \sin z}{\mu \sqrt{\mu^2 - \frac{\mu^{2m}}{\mu_0^{2m-2}} \sin^2 z}}$$

Setzen wir

$$\zeta = \frac{\mu^{m-1}}{\mu_0^{m-1}} \sin z$$

mithin

$$d\zeta = m - 1 \frac{\mu^{m-2}}{\mu_0^{m-1}} \sin z \,.\, d\mu$$

so haben wir

$$d(\delta\vartheta) = \frac{-d\zeta}{(m-1)\sqrt{1-\zeta^2}}$$

welches integrirt, wenn man bedenkt, dass für $\mu = 1$

$$\zeta = \frac{\sin z}{\mu_0^{m-1}}$$

für $\mu = \mu_0$, $\zeta = \sin z$ ist, giebt:

$$\delta\vartheta = \frac{1}{m-1}\left\{z - \text{arc sin}\left(\frac{\sin z}{\mu_0^{m-1}}\right)\right\}$$

oder

$$\sin\left(z - (m-1)\,\delta\vartheta\right) = \frac{1}{\mu_0^{m-1}} \,.\, \sin z$$

welches sich nach der in § 13 pars I. gegebenen Transformation schreiben lässt:

$$(2) \quad \text{tg}\,\frac{m-1}{2}\,\delta\vartheta = \frac{\mu_0^{m-1} - 1}{\mu_0^{m-1} + 1}\,\text{tg}\,(z - \frac{m-1}{2}\,\delta\vartheta)$$

μ ist wenig von der Einheit verschieden, setzen wir daher

$$\mu_0^{m-1} = \left(\mu_0^2\right)^{\frac{m-1}{2}} = \left\{1 + \mu_0^2 - 1\right\}^{\frac{m-1}{2}}$$

Digitized by Google

und entwickeln nach dem Binomischen Lehrsatz, so erhalten wir:

$$\frac{\mu_0^{m-1}-1}{\mu_0^{m-1}+1} = \frac{\frac{m-1}{2}\left(\mu_0^2-1\right)+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-3}{2}\left(\mu_0^2-1\right)^2+\ldots}{2+\frac{m-1}{2}\left(\mu_0^2-1\right)+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-3}{2}\left(\mu_0^2-1\right)^2+\ldots}$$

$$= \frac{m-1}{4}\left(\mu_0^2-1\right)+\frac{1-m}{8}\left(\mu_0^2-1\right)^2+\ldots$$

und für $z = 90^0$ haben wir, da $\operatorname{tg}(z-\frac{m-1}{2}\delta\vartheta)$ alsdann

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{m-1}{2}\delta\vartheta} \text{ ist,}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right) = \frac{m-1}{4}\left(\mu_0^2-1\right)+\frac{1-m}{8}\left(\mu_0^2-1\right)^2+\ldots$$

oder weil

$$\frac{m-1}{2}\delta\vartheta = \operatorname{tg}\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)+\frac{2}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)+\ldots$$

also:

$$\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)^2 = \operatorname{tg}^2\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^4\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)+\ldots \text{ ist,}$$

folgt:

$$\left(\frac{m-1}{2}\delta\vartheta\right)^2 = \frac{m-1}{4}\left(\mu_0^2-1\right)+\frac{2m^2-10m+8}{48}\left(\mu_0^2-1\right)^2+\ldots$$

mithin

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta\vartheta = \sqrt{\frac{\mu_0^2-1}{m-1}+\frac{m-4}{6(m-1)}\left(\mu_0^2-1\right)^2}$$

μ_0 ist bekannt und Simpson und Bradley bestimmten m so, dass $\delta\vartheta$ der Horizontalrefraction entsprach. Nach der Simpson'schen Theorie giebt es aber noch einen andern Weg m zu bestimmen und zwar aus der Barometerhöhe und der Dichtigkeit der Atmosphäre.

Nach § 7 pars I. ist

$$\mu = \sqrt{1+\frac{4N}{c^2}\varrho}$$

oder die Dichtigkeit

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \frac{\mu^2-1}{c_1}, \text{ wenn wir } \frac{4N}{c^2} = c_1 \text{ nennen.}$$

Erhebt man sich in der Entfernung r vom Mittelpunct der Erde, wo die Schwere $= g$, die Dichtigkeit der Luft $= \varrho$ sein mag, um die Höhe dr, so sinke das Barometer um dp und wir haben dann die Gleichung

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dp = -g\varrho\,dr$$

Digitized by Google

Nach dem Gravitationsgesetz ist $g = g_0 \frac{a^2}{r^2}$, wenn wir g_0 die Schwere an der Oberfläche der Erde, deren Radius a gesetzt wurde, nennen, wir haben mithin

(6) . . . . . $dp = -g_0 \frac{a^2}{r^2} \varrho \, dr = g_0 a \varrho \frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r}\right)$

Nach unserer Hypothese ist:

$$\frac{a}{r} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^m$$

daher

$$dp = m \cdot g_0 \cdot a \cdot \varrho \frac{\mu^{m-1}}{\mu_0^m} d\mu$$

und für ϱ nach (4) $\frac{\mu^2 - 1}{c_1}$ gesetzt

$$dp = \frac{g_0 \cdot a \cdot m}{c_1} \left\{ \frac{\mu^{m+1}}{\mu_0^m} - \frac{\mu^{m-1}}{\mu_0^m} \right\} d\mu$$

und integrirt zwischen den Grenzen 0 und p, und 1 und μ erhält man:

(7) . . . . . $p = \frac{g_0 a}{c_1} \left\{ \frac{\frac{m}{m+2} \mu^{m+2} - \mu^m + \frac{2}{m+2}}{\mu_0^m} \right\}$

Setzen wir:

$$\frac{m}{m+2} \mu^{m+2} = \frac{m}{m+2} \left\{ 1 + \mu^2 - 1 \right\}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m}{m+2} + \frac{m}{2}(\mu^2 - 1) + \frac{m^2}{8}(\mu^2 - 1)^2 + \frac{m^3 - 2m^2}{48}(\mu^2 - 1)^3 + \ldots$$

und

$$\mu^m = \left\{ 1 + \mu^2 - 1 \right\}^{\frac{m}{2}} = 1 + \frac{m}{2}(\mu^2 - 1) + \frac{m^2 - 2m}{8}(\mu^2 - 1)^2 + \frac{m^3 - 6m^2 + 8m}{48}(\mu^2 - 1)^3 + \ldots$$

und ebenso μ_0^m, so erhalten wir:

$$p = \frac{g_0 a}{c_1} \left\{ \frac{\frac{m}{4}(\mu^2 - 1)^2 + \frac{m^2 - 2m}{12}(\mu^2 - 1)^3 + \ldots}{1 + \frac{m}{2}\left(\mu_0^2 - 1\right) + \frac{m^2 - 2m}{8}\left(\mu_0^2 - 1\right)^2 + \frac{m^3 - 6m^2 + 8m}{48}\left(\mu_0^2 - 1\right)^3 + \ldots} \right\}$$

oder

(8) . . . $p = \frac{g_0 a}{c_1} \left\{ \frac{m}{4}(\mu^2 - 1)^2 + \frac{m^2 - 2m}{12}(\mu^2 - 1)^3 - \frac{m^2}{8}(\mu^2 - 1)^2 (\mu_0^2 - 1) + \ldots \right\}$

An der Oberfläche der Erde ist:

$$p_0 = g_0 \varrho_0 l = g_0 \frac{l}{c_1} (\mu_0^2 - 1)$$

Digitized by Google

und dies in (8) getheilt giebt:

$$(9) \ldots \frac{p}{p_0} = \frac{a}{l}\left\{\frac{m}{4}\frac{(\mu^2-1)^2}{(\mu_0^2-1)} + \frac{m^2-2m}{12}\frac{(\mu^2-1)^3}{(\mu_0^2-1)} - \frac{m^2}{8}(\mu^2-1)^2 + \ldots\right\}$$

welches wenn $p = p_0$, wofür $\mu = \mu_0$ wird, übergeht in

$$(10) \ldots 1 = \frac{a}{l}\left\{\frac{m}{4}(\mu_0^2-1) - \frac{m^2+4m}{24}(\mu_0^2-1)^2 + \ldots\right\}$$

woraus, wenn wir nur das erste Glied nehmen,

$$(11) \ldots m = \frac{4l}{a(\mu_0^2-1)} + \ldots \text{ folgt.}$$

In (9) eingesetzt und auch nur das erste Glied genommen, findet sich:

$$(12) \ldots \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\mu^2-1}{\mu_0^2-1}\right)^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}$$

eine Gleichung, welche sich auch aus folgender Betrachtung herleiten lässt:

Nach Simpson's Hypothesen nimmt die Dichtigkeit der Luft der Höhe proportional ab; analytisch, wenn h die Höhe der Atmosphäre bezeichnet, heisst das:

$$\varrho : \varrho_0 = a + h - r : h$$

woraus

$$a + h - r = \frac{h\varrho}{\varrho_0}$$

und

$$dr = -\frac{h\,d\varrho}{\varrho_0} \text{ folgt.}$$

Nach Gleichung (5) ist

$$dp = -g\varrho\,dr$$
$$= \frac{gh}{\varrho_0}\varrho\,d\varrho$$

und betrachten wir g, weil a + h wenig von a verschieden ist, als constant und $= g_0$ und integriren zwischen 0 und p, 0 und ϱ, so haben wir

$$p = \frac{g_0 h}{\varrho_0}\,\tfrac{1}{2}\,\varrho^2$$

Es ist aber

$$p_0 = g_0\,\varrho_0\,l,$$

wir haben also

$$\frac{p}{p_0} = \tfrac{1}{2}\frac{h}{l}\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}$$

Für $p = p_0$, wo $\varrho = \varrho_0$, folgt:

$$1 = \tfrac{1}{2}\frac{h}{l}$$

also die Höhe der Atmosphäre

$$h = 2l$$

Digitized by Google

und dies eingesetzt, giebt unsere Gleichung (12)

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}$$

Kehren wir zu dem Werthe von m in (11) zurück und setzen ihn in (3) ein, so erhalten wir:

$$\delta\vartheta = \sqrt{\frac{a\,(\mu_0^2-1)^2}{4\,l-a\,(\mu_0^2-1)} + \frac{2}{3}\frac{l-a\,(\mu_0^2-1)}{4l-a\,(\mu_0^2-1)}\,(\mu_0^2-1)^2}$$

Für μ_0 und l und a die frühern Werthe eingesetzt, erhält man $m = 8.519$, $\delta\vartheta = 30'\,24''.6$, also eine noch zu geringe Refraction im Horizonte.

Newton hat, wie wir gesehen, angenommen, dass die Dichtigkeit dem Drucke proportional sei d. h. er hat eine constante Temperatur vorausgesetzt.

Bei constanter Temperatur ist

(13) . . . . . $p = p_0 \frac{\varrho}{\varrho_0}$

also

$$dp = p_0 \frac{d\varrho}{\varrho_0}$$

dies eingesetzt in Gleichung (6) giebt

$$p_0 \frac{d\varrho}{\varrho_0} = g_0\, a\, \varrho\, \frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r}\right)$$

woraus folgt

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = g_0 \cdot a \cdot \frac{\varrho_0}{p_0} \int_a^r \frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r}\right)$$

oder

$$\lg \varrho - \lg \varrho_0 = g_0\, a \frac{\varrho_0}{p_0}\frac{a}{r} - g_0\, a \frac{\varrho_0}{p_0}$$

welches

(14) . . . . . $\varrho = \varrho_0\, e^{(\frac{a}{r}-1)\, a\, g_0 \frac{\varrho_0}{p_0}}$

wo e die Basis des hyperbolischen Logarithmen-Systems ist, giebt.

Bezeichnen wir, wie oben

$$l = \frac{p_0}{g_0\,\varrho_0} \text{ und } \frac{a}{r} = 1 - s,$$

so wird aus (14)

(15) . . . . . $\varrho = \varrho_0\, e^{-\frac{a\,s}{l}}$

und

$$d\varrho = -\frac{a}{l}\,\varrho_0\, e^{-\frac{a\,s}{l}}\, ds$$

Dies in die Differentialgleichung (C) § 2 eingesetzt giebt:

$$d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha \frac{a}{l}(1-s)\sin z\, . e^{-\frac{a\,s}{l}}\, ds}{\left\{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right\}\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

Digitized by Google

Für $1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$ können wir ohne merklichen Fehler $1 - \alpha$ setzen d. h. für ϱ seinen Mittelwerth $\frac{1}{2}\varrho_0$; thun wir dies und entwickeln

$$\left(\left\{\cos^2 z - 2\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + 2\,s\,\sin^2 z\right\} - s^2 \sin^2 z\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{in}$$

$$\left(\cos^2 z - 2\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + 2\,s\,\sin^2 z\right)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,s^2 \sin^2 z \left(\cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + 2\,s\,\sin^2 z\right)^{-\frac{3}{2}} + \ldots\ldots$$

so erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von s ordnen:

$$\left.\begin{aligned} d\,(\delta\vartheta) = {} & \frac{\alpha\,\frac{a}{l}\,\sin z\,.\,e^{-\frac{a\,s}{l}}\,d\,s}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + 2\,s\,\sin^2 z}} \\ & - \frac{\alpha\,\frac{a}{l}\,\sin z\,e^{-\frac{a\,s}{l}}\left\{\cos^2 z + \frac{3}{2}\,s\,.\,\sin^2 z - 2\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}})\right\} s\,d\,s}{(1-\alpha)\sqrt{\left(\cos^2 z - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}) + 2\,s\,.\,\sin^2 z\right)^3}} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (16)$$

Das 2te Glied ist so klein, dass es vernachlässigt werden kann, sein grösster Werth für $z = 90^0$ ist:

$$-\frac{\alpha\,\frac{a}{l}\,e^{-\frac{a\,s}{l}}\left\{\frac{3}{2}\,s - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}})\right\} s\,d\,s}{(1-\alpha)\left\{2\,s - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\frac{a\,s}{l}})\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von s, vernachlässigt die höhern Potenzen, so hat man

$$1 - e^{-\frac{a\,s}{l}} = \frac{a}{l}\,s$$

und unser Ausdruck wird:

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{a}{l}\,\frac{e^{-\frac{a\,s}{l}}\,d\,s\,\sqrt{s}\,\left\{\frac{3}{2} - 2\,\alpha\,\frac{a}{l}\right\}}{2^{\frac{3}{2}}\left(1 - \alpha\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{a}{l}\,\frac{\left\{\frac{3}{2} - 2\,\alpha\,\frac{a}{l}\right\}}{\left(2 - \frac{2\,\alpha\,a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{a\,s}{l}}\sqrt{s}\,.\,d\,s$$

$$= K\,e^{-s^0}\sqrt{s^0}\;d\,s^0$$

wenn wir $\frac{a\,s}{l} = s^0$ und $K = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{l}{a}}\,\frac{\frac{3}{2} - 2\alpha\frac{a}{l}}{\left(2 - \frac{2\,\alpha\,a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}$ setzen.

Digitized by Google

Dies muss integrirt werden und zwar zwischen den Grenzen $s^0 = 0$, $s^0 = \infty$ [1]), für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = 0$.

Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-s} \sqrt{s^0} \cdot ds^0$$

ist ein besonderer Fall des Euler'schen Integrals 2ter Gattung, welches die Form hat

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx = \Gamma(b)$$

In unserm Falle ist $b = \frac{3}{2}$ und da nach der theilweisen Integration leicht bewiesen werden kann, dass

$$\Gamma(b) = (b-1)\ \Gamma(b-1)$$

ist, so haben wir:

$$\int_0^\infty e^{-s^0} \sqrt{s^0}\, ds^0 = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s^0} s^{0\,-\frac{1}{2}} ds^0 = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\tfrac{1}{2}$$

Einer der schönsten Lehrsätze der Euler'schen Integrale aber ist, dass

$$\Gamma\tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

ist und dadurch

$$\int_0^\infty e^{-s^0} \sqrt{s^0}\, ds^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

dadurch wird das 2te Glied für die Horizontalrefraction in (16)

$$= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{l}{a}}\, \pi \frac{3 - 4\alpha\frac{a}{l}}{4\left(2 - 2\alpha\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man für α, a, l, π die bekannten Werthe ein, so wird das ganze 2te Glied nur $1''$ und dies kann gerne vernachlässigt werden, da wir später sehen werden, dass die Einflüsse von der Ausstrahlung des Erdbodens viel grössere Unregelmässigkeiten hervorbringen.

Wir setzen desshalb statt (16)

$$(17) \quad \ldots \quad d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha \cdot \frac{a}{l} \cdot e^{-\frac{as}{l}} \cdot \sin z \cdot ds}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\,(1 - e^{-\frac{as}{l}}) + 2s \cdot \sin^2 z}}$$

Um den Ausdruck einfacher zu machen führen wir eine neue Variable ein und setzen:

$$(18) \quad \ldots \quad s = s' + \alpha \frac{1 - e^{-\frac{as}{l}}}{\sin^2 z}$$

[1]) Strenge genommen, wie wir im nächsten § sehen werden, ist die obere Grenze von s nicht ∞, sondern 1, von s^0 daher nicht ∞, sondern $\frac{a}{l}$, der Werth des Integrals von $\frac{a}{l}$ bis ∞ ist aber äusserst gering.

Digitized by Google

dadurch wird

$$d\,s = d\,s' + \frac{\alpha}{\sin^2 z}\,\frac{a}{l}\,e^{-\frac{a\,s}{l}}\,d\,s,$$

und während der Nenner die einfache Gestalt

$$(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2\,s'\sin^2 z}$$

annimmt, lässt sich in den Zähler durch die Substitution des Ausdrucks von d s die Variable s' und d s' allein noch nicht einführen. Wir müssen daher ein anderes Verfahren anwenden und drücken den Zähler aus durch

$$-\alpha \sin z\, d\,.\,(e^{-\frac{a\,s}{l}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und wollen $e^{-\frac{a\,s}{l}}$ in (18) als Function von (s') herzustellen suchen.

Nach dem Maclaurin'schen Lehrsatz ist:

$$f(x) = f(x)_0 + f'(x)_0\,\frac{x}{1} + f''(x)_0\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots + f^{(n)}(x)_0\,\frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (20)$$

wo f(x) irgend eine beliebige Function sein kann,

$f(x)_0$ ist der Werth der Function, wenn man darin $x = 0$ setzt

$f'(x)_0$ der Werth des ersten Differentials, in dem $x = 0$ gesetzt wird etc.

Setzen wir

$$f(x) = (u) = e^{-\frac{a\,s}{l}} \text{ und } x = \alpha,$$

so ist aus (18)

$$f(x)_0 = (u)_0 = e^{-\frac{a\,s'}{l}}$$

und wir haben noch

$$f'(x) = \frac{d\,(u)}{d\,\alpha},\ f''(x) = \frac{d^2\,(u)}{d\,\alpha^2} \text{ etc. } f^{(n)}(x) = \frac{d^n\,(u)}{d\,\alpha^n}$$

zu finden. Sobald Gleichung (18) eine explicite Function zwischen (u) und α wäre, könnte die Differentiation unmittelbar geschehen. Aber Gleichung (18) ist implicit und wir müssen noch einen kleinen Umweg machen. Schreiben wir in Gleichung (18)

$$\frac{1 - e^{-\frac{a\,s}{l}}}{\sin^2 z} = y,$$

so haben wir

$$s = s' + \alpha\,y$$

und wenn wir partiell differentiiren, dass heisst die partiellen Differentiale $\left(\frac{d\,s}{d\,\alpha}\right)$ und $\left(\frac{d\,s}{d\,s'}\right)$ suchen und diese in einander dividiren, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung:

Digitized by Google

$$\left(\frac{d\,s}{d\,\alpha}\right) = y\left(\frac{d\,s}{d\,s'}\right)$$

Nach der Differentialrechnung aber ist

$$\left(\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right) = \left(\frac{d\,u}{d\,s}\right)\left(\frac{d\,s}{d\,\alpha}\right),$$

also in unserm Fall:

(21) . . . . . $\left(\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right) = y\left(\frac{d\,u}{d\,s}\right)\left(\frac{d\,s}{d\,s'}\right) = y\left(\frac{d\,u}{d\,s'}\right)$

oder wenn wir $y\,d\,u$ erst nach s' integriren und nachher wieder differentiiren, wodurch sein Werth nicht geändert wird:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right) = \left\{\frac{d\int y\,d\,u}{d\,s'}\right\}$$

Das 2te Differential wird

(22) . . . . . $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right) = \left\{\frac{d^2\int y\,d\,u}{d\,s'\,d\,\alpha}\right\}$

Setzen wir in der Gleichung (21)

$$\left(\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right) = y\left(\frac{d\,u}{d\,s'}\right)$$

für u das Integral $\int y\,d\,u$, so wird daraus

$$\left(\frac{d\int y\,d\,u}{d\,\alpha}\right) = \left(\frac{d\int y^2\,d\,u}{d\,s'}\right)$$

und aus Gleichung (22) wird

(23) . . . . . $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right) = \left(\frac{d^2\int y^2\,d\,u}{d\,s'^2}\right) = \left(\frac{d\,.\,y^2\frac{d\,u}{d\,s'}}{d\,s'}\right)$

Indem man noch weiter differentiirt und u mit $\int y^2\,d\,u$ vertauscht, erhält man analog

(24) . . . . . $\left(\frac{d^3u}{d\alpha^3}\right) = \left(\frac{d^3\int y^3\,d\,u}{d\,s'^3}\right) = \frac{d^2\,.\,y^3\left(\frac{d\,u}{d\,s'}\right)}{d\,s'^2}$

und allgemein

$$\left(\frac{d^n\,u}{d\,\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^n\int y^n d\,u}{d\,s'^n}\right) = \frac{d^{n-1}\,y^n\left(\frac{d\,u}{d\,s'}\right)}{d\,s'^{n-1}}$$

Setzt man dies in den Maclaurin'schen Lehrsatz (20) ein, der sich nach unserer letztern Bezeichnung schreibt:

$$(u) = (u)_0 + \frac{d\,(u)_0}{d\,\alpha}\,\frac{\alpha}{1} + \frac{d^2\,(u)_0}{d\,\alpha^2}\,\frac{\alpha^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^n\,(u)_0}{d\,\alpha^n}\,\frac{\alpha^n}{n!} + \ldots.$$

Digitized by Google

so erhält man:

$$(25)\ \ldots\ (u) = (u)_0 + \frac{\alpha}{1}\left(y\,\frac{d\,u}{d\,s'}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{d\,.\,y^2\,\frac{d\,u}{d\,s,}}{d\,s'}\right)_0 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left(\frac{d^2\,y^3\,\frac{d\,u}{d\,s'}}{d\,s'^2}\right)_0$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{d^{n-1}\,y^n\,\frac{d\,u}{d\,s'}}{d\,s'^{n-1}}\right)_0 + \ldots\ldots$$

Setzt man für u seinen Werth

$$(u) = e^{-\frac{a}{l}s}$$

$$(u)_0 = e^{-\frac{a}{l}s'},\quad y = \frac{1-e^{-\frac{a}{l}s}}{\sin^2 z}$$

$$\left(y\,\frac{d\,u}{d\,s'}\right)_0 = -\frac{a}{l\sin^2 z}\left(1-e^{-\frac{a}{l}s'}\right)e^{-\frac{a}{l}s'}\quad \text{etc.}$$

so haben wir

$$(26)\ \ldots\ e^{-\frac{a}{l}s} = e^{-\frac{a}{l}s'} - \frac{\alpha\,\frac{a}{l}}{\sin^2 z}\left(1-e^{-\frac{a}{l}s'}\right)e^{-\frac{a}{l}s'}$$

$$- \frac{\alpha^2\,\frac{a}{l}}{1.2\sin^4 z}\,d\,.\,\frac{\left\{\left(1-e^{-\frac{a}{l}s'}\right)^2 e^{-\frac{a}{l}s'}\right\}}{d\,s'} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{\alpha^n\,\frac{a}{l}}{n!\sin^{2n} z}\,\frac{d^{n-1}\left\{\left(1-e^{-\frac{a}{l}s'}\right)^n e^{-\frac{a}{l}s'}\right\}}{d\,s'^{n-1}}$$

Wendet man dies auf (19) an, so haben wir nach der Differentiation statt (17) für $d\,(\delta\vartheta)$ den Ausdruck:

$$d\,(\delta\vartheta) = \frac{\alpha\,\frac{a}{l}\sin z\,d\,s'}{(1-\alpha)\left\{\cos^2 z + 2s'.\sin^2 z\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$(27)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} -e^{-\frac{a\,s'}{l}} \\ -\frac{\alpha}{\sin^2 z}\,\frac{d\left\{(e^{-\frac{a\,s'}{l}}-1)\,e^{-\frac{a\,s'}{l}}\right\}}{d\,s'} \\ +\frac{\alpha^2}{1\,2\sin^4 z}\,\frac{d^2\left\{(e^{-\frac{a\,s'}{l}}-1)^2\,e^{-\frac{a\,s'}{l}}\right\}}{d\,s'^2} - \ldots\ldots \\ \pm\frac{\alpha^n}{1.2.3..n.\sin^{2n} z}\,\frac{d^n\left\{(e^{-\frac{a\,s'}{l}}-1)^n\,e^{-\frac{a\,s'}{l}}\right\}}{d\,s'^n} \\ \mp\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

das obere Zeichen im n ten Gliede, wenn n grade, das untere, wenn n ungrade ist. Nach dem binomischen Lehrsatz ist:

$$(e^{-\frac{a\,s'}{l}}-1)^n = e^{-n\frac{a\,s'}{l}} - n\,e^{-\frac{(n-1)\,a\,s'}{l}} + \frac{n\,.\,n-1}{2}\,e^{-\frac{(n-2)\,a\,s'}{l}} - \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1.2.3}\times$$

$$\times\, e^{-\frac{(n-3)\,a\,s'}{l}} + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Mit $e^{-\frac{as'}{l}}$ multiplicirt und n mal hintereinander differentiirt, kömmt

$$\frac{d^n\left\{\left(e^{-\frac{as'}{l}}-1\right)^n e^{+\frac{as'}{l}}\right\}}{ds'^n} = \pm\left(\frac{a}{l}\right)^n\left\{(n+1)^n e^{-(n+1)\frac{as'}{l}} - n^n\frac{n}{1}e^{-n\frac{as'}{l}} + (n-1)^n\frac{n.n-1}{2}e^{-(n-1)\frac{as'}{l}} - \ldots\ldots\right\}$$

das Zeichen $\pm$, je nachdem n grade oder ungrade ist.

Dies eingesetzt in (27) giebt

$$d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{a}{l}\frac{\sin z\, ds'}{(\cos^2 z + 2s'.\sin^2 z)^{\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{as'}{l}} \\ + \frac{\alpha a}{l\sin^2 z}\left(2e^{-2\frac{as'}{l}} - e^{-\frac{a}{l}s'}\right) \\ \frac{\alpha^2 a^2}{1.2.l^2\sin^4 z}\left(3^2 e^{-\frac{3as'}{l}} - 2.2^2 e^{-\frac{2as'}{l}} + e^{-\frac{as'}{l}}\right) \\ + \frac{\alpha^3 a^3}{1.2.3\,l^3\sin^6 z}\left(4^3 e^{-\frac{4as'}{l}} - 3.3^3 e^{-\frac{3as'}{l}}\right. \\ \qquad \left. + \frac{3.2}{1.2}2^3 e^{-\frac{2as'}{l}} - e^{-\frac{as'}{l}}\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad (28)$$

Aus unserer Bedingungsgleichung

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{a}{l}s}$$

folgen, für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = 0$, bei der Integration die Grenzen von $s = 0$ und ∞, für s' ebenfalls 0 und ∞.

Aus der Gleichung $\frac{a}{r} = 1 - s$ folgt: für $r = a$, $s = 0$; aber die andre Grenze von r ist $= a +$ der Höhe der Atmosphäre, und Gleichung (14) lehrt uns, dass je grösser r, desto geringer die Dichtigkeit ϱ wird. Der grösste Werth von r ist

$$r = \infty$$

und dafür wird $s = 1$, $s' = 1 - \frac{\alpha\,(1 - e^{-\frac{a}{l}})}{\sin^2 z}$

Bei dieser letzten Grenze [1]) ist aber

$$e^{-\frac{a}{l}s'}$$

[1]) In $s' = 1 - \frac{\alpha\,(1 - e^{-\frac{a}{l}})}{\sin^2 z}$ können wir uns z immer so gross denken, dass der Werth nicht viel von der Einheit abweicht; für kleine Zenithdistanzen werden wir nachher eine andere bequemere Formel finden, unsere Entwicklungen sollen uns nur die Refraction in der Nähe des Horizontes genau ergeben.

Digitized by Google

eine sehr kleine Grösse, weil $e > 2$ und $\frac{a}{l}$ nahe 800 ist, und vernachlässigen wir diese Grösse, d. h. setzen

$$e^{-\frac{a}{l}s'} = 0$$

so heisst dies $s' = \infty$ setzen [1]).

Alle einzelnen Glieder in (28) enthalten ausser Constanten noch den zu integrirenden Factor:

$$(29) \quad \frac{\frac{a}{l}\, ds' \cdot e^{-\frac{v\,a}{l}s'} \sin z}{\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}}$$

wo v die Werthe 1, 2, 3 .... n .... annehmen kann.

Setzt man um durch eine neue Veränderliche den Ausdruck einfacher zu machen:

$$\frac{1}{2}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + s' = \frac{1}{a\,v}\, t^2$$

wodurch

$$ds' = 2\frac{l}{a\,v}\, t\,dt$$

wird, so wird der Ausdruck in (29) gleich:

$$(30) \quad \sqrt{\frac{2a}{lv}}\, dt\, e^{\frac{v\,a}{2l}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} - t^2}$$

welcher integrirt werden soll zwischen den Grenzen:

$$t = \sqrt{\frac{a\,v}{2\,l}}\frac{\cos z}{\sin z} \text{ und } t = \infty$$

Setze ich der Kürze wegen:

$$(31) \quad \int_{\sqrt{\frac{a\,v}{2\,l}}\frac{\cos z}{\sin z}}^{\infty} e^{-tt}\, dt = e^{-\frac{v\,a}{2l}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}}\, \Psi(v)$$

so wird der Ausdruck in (30), nachdem er integrirt ist,

$$\sqrt{\frac{2a}{v\,l}}\, \Psi(v)$$

---

[1]) Setzt man, in $\frac{a}{r} = 1 - s$, $s = 1 \pm \varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Grösse bezeichnet, so macht r bei der Annäherung von ε an 0 einen Sprung von $-\infty$ zu $+\infty$. Für $s = \infty$ wird r gar 0, anstatt dass es ∞ werden sollte. Für $s = 1$ wird $\varrho = \varrho_0\, e^{-\frac{a\,s}{l}}$ freilich nicht $= 0$, aber da $\frac{a}{l} = 800$ ist, so wird ϱ gleich einer Zahl, deren 320 erste Decimalen alle 0 sind.

Digitized by Google

und aus Gleichung (28) wird nach der Integration:

$$(32)\quad \delta\theta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2a}{l}}\left\{\begin{array}{l} \Psi(1) + \frac{\alpha\frac{a}{l}}{\sin^2 z}\left\{2^{\frac{1}{2}}\Psi(2) - \Psi(1)\right\} \\ + \frac{\alpha^2\frac{a^2}{l^2}}{1.2.\sin^4 z}\left\{3^{\frac{3}{2}}\Psi(3) - 2.2^{\frac{3}{2}}\Psi(2) + \Psi(1)\right\} \\ + \frac{\alpha^3\frac{a^3}{l^3}}{1.2.3\sin^6 z}\left\{4^{\frac{5}{2}}\Psi(4) - 3.3^{\frac{5}{2}}\Psi(3) + 3.2^{\frac{5}{2}}\Psi(2) - \Psi(1)\right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

oder da

$$\Psi(1)\left\{1 - \frac{\alpha\frac{a}{l}}{1\sin^2 z} + \frac{\alpha^2\frac{a^2}{l^2}}{1.2\sin^4 z} - \frac{\alpha^3\frac{a^3}{l^3}}{1.2.3\sin^6 z} + \frac{\alpha^4\frac{a^4}{l^4}}{1.2.3.4\sin^8 z} - \ldots\right\} = e^{-\frac{\alpha.a}{1.\sin^2 z}}\Psi(1)$$

ist, und $\Psi(2)$, $\Psi(3)$ mit ähnlichen Reihen multiplicirt sind, so erhält man

$$(33)\quad \delta\theta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2a}{l}}\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{\alpha a}{l\sin^2 z}}\Psi(1) \\ + \frac{\alpha a}{l\sin^2 z}2^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{2\alpha a}{l\sin^2 z}}\Psi(2) \\ + \frac{\alpha^2 a^2}{l^2\sin^4 z}.3^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\alpha a}{l\sin^2 z}}\Psi(3) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Es fehlt nur noch die Lösung des Integrals

$$\Psi(\nu)$$

Unsre vorläufige Aufgabe ist nach der Newton'schen Hypothese die Horizontalrefraction zu kennen, um zu sehen ob diese mit den Beobachtungen harmonirt. Für diese, da $z = 90^0$ ist, wird die Lösung leichter, wir wollen erst diese und im folgenden § werden wir alsdann die allgemeine Lösung geben.

Für $z = 90^0$ haben wir aus (31)

$$34)\quad e^{-\frac{a\nu}{2l}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}}\Psi(\nu) = \Psi(\nu) = \int_0^\infty e^{-tt}\,dt.$$

In das Euler'sche Integral

$$\Gamma\tfrac{1}{2} = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \sqrt{\pi}$$

setzen wir

$$x = t^2, \text{ so haben wir } \Gamma\tfrac{1}{2} = 2\int_0^\infty e^{-tt}\,dt = \sqrt{\pi}$$

daher

$$\Psi(\nu) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Digitized by Google

und (33) geht über für die Horizontalrefraction in:

$$\delta\vartheta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\tfrac{1}{2}\frac{a\pi}{l}}\left\{e^{-\frac{\alpha a}{l}} + \frac{\alpha . a}{l}\,2^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha a}{l}} + \frac{\alpha^2 a^2}{1.2\,l^2}\,3^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3\alpha a}{l}} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\tfrac{1}{2}\frac{a\pi}{l}}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha a}{l}\left\{2^{\frac{1}{2}} - 1\right\} \\ + \frac{\alpha^2 a^2}{1.2\,l^2}\left\{3^{\frac{3}{2}} - 2.2^{\frac{3}{2}} + 1\right\} \\ + \frac{\alpha^3 a^3}{1.2.3\,l^3}\left\{4^{\frac{5}{2}} - 3.3^{\frac{5}{2}} + 3.2^{\frac{5}{2}} - 1\right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Setzt man hierin für α, a, l, π die bekannten Werthe, so erhalten wir:

$$\delta\vartheta = 0{,}0011609$$
$$= 39'\,54'',6$$

Wir sehen also, dass nach der Theorie die Cassini'sche Hypothese eine viel zu kleine, die Simpson'sche, in der die Dichtigkeit in arithmetischer Progression abnimmt, auch noch eine zu kleine, die geometrische Abnahme der Dichtigkeit aber nach der Newton'schen Hypothese eine zu grosse Horizontalrefraction giebt. Laplace, der die hier behandelten Fälle in seiner Mécanique céleste fast ebenso behandelt, nahm eine Combination der arithmetischen und geometrischen Function an und in §5 werden wir zu der Laplace'schen Hypothese übergehen. Vorher wird enthalten

§ 4.

die Integration von $e^{-\frac{a\nu\cos^2 z}{2l\sin^2 z}}\int_{\sqrt{\frac{a\nu}{2l}}\frac{\cos z}{\sin z}}^{\infty} e^{-tt}\,dt$

Bereits zweimal habe ich das Euler'sche Integral $\Gamma(\frac{1}{2})$ angeführt und ich glaube davon hier eine kurze Auflösung geben zu müssen.

Euler bezeichnete bekanntlich mit

$$\Gamma(a) \text{ das Integral } \int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{a-1}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nach der theilweisen Integration ist:

$$\int e^{-x}\,x^{a-1}\,dx = \frac{e^{-x}\,x^a}{a} + \frac{1}{a}\int e^{-x}\,x^a\,dx$$

und wenn man die Grenzen einsetzt

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^a\,dx$$

oder

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\,\Gamma(a+1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Beweisen wir, dass $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$, wovon wir bereits im vorigen § Gebrauch gemacht haben.

Digitized by Google

Nach der Definition in (1) ist

$$\Gamma(a+b) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a+b-1}\, dx$$

und setzt man

$$x\,(1+y) \text{ statt } x,$$

so muss für dx auch $(1+y)\,dx$ gesetzt werden und man hat

$$\Gamma(a+b)\,\frac{1}{(1+y)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-x(1+y)}\, x^{a+b-1}\, dx$$

und multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\int_0^\infty y^{a-1}\, dy$, so hat man

$$(3) \quad \Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy\,^{1}) = \int_0^\infty dx.e^{-x}\, x^{a+b-1}\int_0^\infty dy.e^{-xy}\, y^{a-1}$$

Setzen wir

$$y\,x = x'$$

so ist

$$dy = \frac{dx'}{x} \text{ und } y^{a-1} = \frac{x'^{a-1}}{x^{a-1}}$$

mithin das letzte Integral rechts in (3)

$$\int_0^\infty dy.e^{-xy}\, y^{a-1} = \int_0^\infty \frac{dx'.e^{-x'}\, x'^{a-1}}{x^a} = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$$

und aus (3) wird

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy = \int_0^\infty dx.e^{-x}\,\frac{x^{a+b-1}}{x^a}\,\Gamma(a)$$

oder

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy = \Gamma(b)\;\Gamma(a)$$

und macht man $a+b=1$, also $b=1-a$, hat man

$$(4) \quad \Gamma(1)\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)$$

Es ist aber

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1,$$

daher

$$(5) \quad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy$$

---

[1]) Das Integral $\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy$ ist das Euler'sche Integral erster Gattung und wird mit (a, b) bezeichnet.

Digitized by Google

und macht man $a = \frac{1}{2}$, hat man

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{1+y}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Führt man dadurch, dass man $y = x^2$ setzt, eine neue Veränderliche ein, so wird das Integral rechts $= 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2 \text{ arc } (\text{tg } x)$ und die gehörigen Grenzen ∞ und 0 eingeführt, wofür der arc (tg x) einmal $\frac{\pi}{2}$, das andere Mal 0 wird, geben statt (6)

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pi$$

also

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

welches wir beweisen wollten.

Dass das

$$\int_0^\infty e^{-tt}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ist, haben wir durch das Euler'sche Integral $\Gamma(\frac{1}{2})$ bewiesen, wir können es auch leicht auf andre Weise herleiten.

Setzen wir

$$\int_0^\infty e^{-tt}\,dt = K$$

und machen

$$t^2 = s\,x^2,$$

so wird

$$dt = \sqrt{s}\,dx$$

und

$$K = \int_0^\infty e^{-s\,x^2}\sqrt{s}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Setzen wir dagegen

$$t^2 = s,$$

so ist

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds$$

und

$$K = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{2\sqrt{s}}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Gleichung (9) mit (10) multiplicirt giebt

$$K^2 = \int_0^\infty e^{-s\,x^2}\sqrt{s}\,dx \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{2\sqrt{s}}\,ds$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s\,(1+x^2)}\,ds \int_0^\infty dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty dx\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Digitized by Google

also

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

welches wir haben wollten.

Um endlich in (31) des vorigen §

$$(11)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \Psi(v) = e^{\frac{av}{2l}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}} \int_{\sqrt{\frac{av}{2l}}\frac{\cos z}{\sin z}}^{\infty} e^{-tt}\,dt$$

zu bestimmen, sei

$$(12)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \sqrt{\frac{av}{2l}\frac{\cos z}{\sin z}} = T$$

und wir haben

$$\Psi(v) = e^{T^2}\int_T^{\infty} e^{-tt}\,dt$$

Ist T klein, so kann man die Formel

$$\int_T^{\infty} e^{-tt}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-tt}\,dt - \int_0^T e^{-tt}\,dt$$

$$(13)\quad \ldots\ldots\ldots\quad = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^T e^{-tt}\,dt$$

anwenden und e^{-tt} in eine Reihe nach Potenzen von t entwickeln, jedes einzelne Glied integriren und die Grenzen einsetzen. Man erhält so:

$$\int_0^T e^{-tt}\,dt = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{T^7}{7} + \ldots\ldots$$

und:

$$(14)\ldots \Psi(v) = e^{T^2}\int_T^{\infty} e^{-tt}\,dt = e^{T^2}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - T + \frac{T^3}{3} - \frac{1}{1.2}\frac{T^5}{5} + \frac{1}{1.2.3}\frac{T^7}{7} - \ldots\right\}$$

Diese Reihe convergirt immer, doch nur, wenn T klein ist, rasch.

Eine andere Entwicklung ist, wenn man sich der theilweisen Integration bedient, folgende: Es ist:

$$\int_0^T e^{-tt}\,t^2\,dt = \int_0^T \frac{d\left(-\frac{1}{2}e^{-tt}\right)}{dt}\,t\,dt = -\tfrac{1}{2}e^{-T^2}\,.\,T + \tfrac{1}{2}\int_0^T e^{-tt}\,dt$$

also:

$$\int_0^T e^{-tt}\,dt = e^{-T^2}.T + 2\int_0^T e^{-tt}\,t^2\,dt$$

und durch die theilweise Integration findet sich weiter:

$$\int_0^T e^{-tt}\,t^2\,dt = e^{-TT}\frac{T^3}{3} + \frac{2}{3}\int_0^T e^{-tt}\,t^4\,dt$$

und allgemein ist:

$$(15)\ldots\ldots \int_0^T e^{-tt}\,t^{2n-2}\,dt = e^{-T^2}\frac{T^{2n-1}}{2n-1} + \frac{2}{2n-1}\int_0^T e^{-tt}\,t^{2n}\,dt$$

Digitized by Google

Alles eingesetzt giebt

$$(16)\ldots \int_0^T e^{-tt}\,dt = e^{-TT}\,T\left\{1+\frac{2\,T^2}{1.3}+\frac{(2\,T^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2\,T^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots+\frac{(2\,T^2)^{n-1}}{1.3.5.(2n-1)}\right\} + \frac{2^n}{1.3.5..2n-1}\int_0^T e^{-tt}\,t^{2n}\,dt$$

Diese Reihe weit genug fortgesetzt convergirt schliesslich immer, und wenn man n gross genug nimmt, ist das letzte Glied, das Integral, kleiner als das vorletzte Glied. Es ist nämlich der grösste Werth von e^{-tt}, für $t=o$, gleich 1, also

$$\frac{2^n}{1.3.5.2n-1}\int_0^T t^{2n}\,dt > \frac{2^n}{1.3.5.2n-1}\int_0^T e^{-tt}\,t^{2n}\,dt$$

und das Integral links aufgelöst und die Grenzen eingesetzt giebt

$$\frac{2^n}{1.3.5..2n-1.2n+1}\,T^{2n+1}$$

Das vorletzte Glied ist

$$e^{-TT}\,\frac{2^{n-1}\,T^{2n-1}}{1.3.5\ldots 2n-1}$$

und soll dies grösser als der grösste Werth des Integrals sein, so muss

$$e^{-TT}\,T^{-2} > \frac{2}{2n+1}$$

d. h. $2n+1 > 2\,e^{TT}\,T^2$ sein, welches für jeden endlichen Werth von T möglich ist.

Durch (16) wird

$$(17)\ldots \Psi(v) = e^{T^2}\int_T^\infty e^{-tt}\,dt = \tfrac{1}{2}\,e^{T^2}\sqrt{\pi} - T\left\{1+\frac{2\,T^2}{1.3}+\frac{(2\,T^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2\,T^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots+\frac{(2\,T^2)^{n-1}}{1.3.5.2n-1}\right\} - \frac{2^n}{1.3.5\ldots 2n-1}\int_0^T e^{-tt}\,t^{2n}\,dt$$

Aber sowohl Reihe (14) wie (17) sind nur dann zur Berechnung vortheilhaft anwendbar, wenn T klein ist. Will man z. B. mit (14) dass das 11te Glied

$$\frac{e^{T^2}\,T^{19}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.19} < 0{,}00001$$

sei, so darf

T nicht grösser als 1.16,

mit (17) dürfte, um bei demselben Gliede diese Genauigkeit zu haben,

T ebenfalls nicht grösser als 1.15 sein.

Für T = 1 ist das 11te Glied in

in (14)	0,0000004
in (17)	0,0000008

Digitized by Google

Ist T nicht so klein, sondern grösser als 3, so kann man folgende Entwicklung anwenden. Nach der theilweisen Integration ist auch

$$\int e^{-tt}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{e^{-tt}}{t} - \frac{1}{2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^2}$$

und

$$-\frac{1}{2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-tt}}{t^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^4}$$

und

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^4} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-tt}}{t^5} - \frac{1.3.5}{2.2.2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^6}$$

und allgemein

$$\pm\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.2.2\ldots\ldots 2}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^{2n}} = \mp\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\frac{e^{-tt}}{t^{2n+1}} \mp\frac{1.3.5..2n+1}{2^{n+1}}\int e^{-tt}\frac{dt}{t^{2n+2}}$$

Alles addirt giebt, wenn man die Grenzen ∞ und T einsetzt:

$$\int_T^\infty e^{-tt}\,dt = e^{-TT}\left\{\frac{1}{2T} - \frac{1}{2.2T^3} + \frac{1.3}{2.2.2T^5} - \frac{1.3.5}{2.2.2.2T^7} + \ldots \pm\frac{1.3.5.7\ldots2(n-1)}{2^{n+1}T^{2n+1}}\right\} \mp\frac{1.3.5\ldots2n+1}{2^{n+1}}\int_T^\infty e^{-tt}\frac{dt}{t^{2n+2}}$$

Wie eben vorher lässt sich auch hier nachweisen, dass das Integral abgesehen vom Zeichen kleiner ist als das letzte mitgenommene Glied.

Der grösste Werth von e^{-tt} wird zwischen den Grenzen T und ∞ e^{-TT} sein, sodass das Integral kleiner ist als

$$\frac{1.3.5\ldots2n+1}{2^{n+1}}e^{-TT}\int_T^\infty\frac{dt}{t^{2n+2}}$$

also auch, wenn man das Integral auflöst, kleiner als der Werth

$$\frac{1.3.5\ldots2n+1}{2^{n+1}}e^{-TT}\frac{1}{t^{2n+1}}\frac{1}{2n+1},$$

und für t die Werthe T und ∞ gesetzt, kleiner als

$$e^{-TT}\frac{1.3.5\ldots2n-1}{2^{n+1}}\frac{1}{T^{2n+1}}$$

welcher Werth nichts anderes ist als das letzte Glied.

Für $\Psi(v)$ erhalten wir schliesslich:

$$(18)\ldots\ \Psi(v) = e^{TT}\int_T^\infty e^{-tt}\,dt = \frac{1}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T^2)^3} + \ldots \pm\frac{1.3.5..(2n-1)}{(2T^2)^n}\right\} \mp e^{TT}\frac{1.3.5..(2n+1)}{2^{n+1}}\int_T^\infty e^{-tt}\frac{dt}{t^{2n+2}}$$

Digitized by Google

Diese Reihe ist convergent bis zum $\left\{(T^2+\frac{1}{4})+1\right\}$ten Gliede, weil nämlich der Exponent der Reihe $\frac{2n-1}{2T^2}$ ist und nach den Sätzen über die Convergenz und Divergenz der Reihen dieser Exponent bei einer convergirenden Reihe kleiner als 1 sein muss.

Bei $T = 1$ convergirt die Reihe in 2 Gliedern; würde man mit diesem Gliede aufhören, so wäre nach unserm obigen Satze der Fehler nicht $> \frac{1}{4}$.

Bei $T = 2$ convergirt die Reihe in 5 Gliedern; hören wir mit diesem auf, so ist der Fehler nicht $> 0{,}0064$.

Bei $T = 3$ convergirt die Reihe in 10 Gliedern und der Fehler ist, wenn wir mit diesem abschliessen, $< 0{,}00003$.

Bei $T = 4$ ist die Summe von 17 Gliedern nicht fehlerhaft um

$$0{,}00000002$$

Eine andre Entwicklung hat noch Laplace gegeben, er giebt den Werth von $\Psi(v)$ in einem Kettenbruch, dessen Werth man so genau bestimmen kann, wie man will.

Es sei

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots e^{tt}\int e^{-tt}\,dt = u$$

so ist

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{du}{dt} = 2te^{tt}\int e^{-tt}\,dt - 1 = 2tu + 1$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 2t\frac{du}{dt} + 2u$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = 2t\frac{d^2u}{dt^2} + 2.2\frac{du}{dt}$$

allgemein

$$\frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}} = 2t\frac{d^nu}{dt^n} + 2.n\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}$$

Dividirt man mit $1.2.3\ldots n = n!$ und nennt der Kürze wegen

$$\frac{d^nu}{n!\,dt^n} = u_n,\quad \frac{d^{n+1}u}{(n+1)!\,dt^{n+1}} = u_{n+1} \text{ etc.},$$

so hat man:

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots (n+1)u_{n+1} = 2tu_n + 2u_{n-1}$$

Für $n = 1$ kommt

$$2u_2 = 2tu_1 + 2u_0$$

welches giebt mit oben verglichen

$$(\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_0 = u$$

Für $n = 0$ folgt

$$u_1 = 2tu_0 + 2u_{-1}$$

welches mit β verglichen

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots u_{-1} = +\tfrac{1}{2} \quad \text{giebt.}$$

Digitized by Google

Aus Gleichung (γ) folgt

$$-\frac{u_{n-1}}{u_n} = t - \tfrac{1}{2}(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Vertauscht man $n+1$ mit n, kömmt

$$-\frac{u_n}{u_{n+1}} = t - \tfrac{1}{2}(n+2)\,\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$$

Durch eine abermalige Vertauschung folgt:

$$-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = t - \tfrac{1}{2}(n+3)\,\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}$$

und so kann man weiter fortfahren.

Durch Umkehrung dieser letzten Werthe hat man

$$-\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{t}}{1 - \frac{n+1}{2t}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

und

$$-\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{t}}{1 - \frac{n+2}{2t}\,\frac{u_{n+2}}{u_n}}$$

und

$$-\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{t}}{1 - \frac{n+3}{2t}\,\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}}, \text{ etc.}$$

und alle Werthe nach und nach in einander substituirt giebt:

$$-\frac{u_n}{u_{n-1}} = \cfrac{\frac{1}{t}}{1 + \cfrac{\frac{n+1}{2t^2}}{1 + \cfrac{\frac{n+2}{2t^2}}{1 + \cfrac{\frac{n+3}{2t^2}}{1 + \cfrac{\frac{n+4}{2t^2}}{1 + \cfrac{\frac{n+5}{2t^2}}{\ddots \; 1 - \frac{n+m}{2t}\,\frac{u_{n+m}}{u_{n+m-1}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Für n = 0 erhält man mit Berücksichtigung von (δ) und (ε)

$$u = -\cfrac{\frac{1}{2t}}{1+\cfrac{\frac{1}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2t^2}}{}}}}}$$

Für u das Integral gesetzt und die Grenzen eingeführt giebt:

$$\Psi(v) = e^{TT}\int_T^\infty e^{-tt}\,dt = \frac{1}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{5}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{6}{2T^2}}{+\cdots}}}}}}} \qquad \ldots\ldots (19)$$

Nach diesen 4 verschiedenen Formeln (14) (17) (18) (19) kann man den Werth des Integrals finden. Kramp und Bessel haben ausführliche Tafeln gegeben, die Kramp'schen sind die umfangreichsten; für unsere Zwecke genügen die Bessel'schen, welche von T = 0 bis T = 10 gehen.

Für T = 0 bis T = 1 ist das Argument die Zahl T, von T = 1 bis T = 10 ist das Argument der Logarithmus T. Man findet diese Tafeln in den „Fundamentis astronomiae" Regiomonti 1818 pag. 36 und 37 und hieraus habe ich sie copirt.

Digitized by Google

Tafel I.

Logarithmus des Integrals $e^{TT}\int_T^\infty e^{-tt}dt$.

Argument T.

Argum. T	Logarithm. des Integrals	Differenz I.	Differenz II.	Argum. T	Logarithm. des Integrals	Differenz I.	Differenz II.
0,00	9,9475449			0,50	9,7369072		
		— 48847				— 36060	+ 207
0,01	9,9426602		+ 312	0,51	9,7333012		+ 202
		— 48535				— 35858	
0,02	9,9378067		+ 312	0,52	9,7297154		+ 203
		— 48223				— 35655	
0,03	9,9329844		+ 306	0,53	9,7261499		+ 201
		— 47917				— 35454	
0,04	9,9281927		+ 305	0,54	9,7226045		+ 199
		— 47612				— 35255	
0,05	9,9234315		+ 303	0,55	9,7190790		+ 196
		— 47309				— 35059	
0,06	9,9187006		+ 300	0,56	9,7155731		+ 197
		— 47009				— 34862	
0,07	9,9139997		+ 297	0,57	9,7120869		+ 195
		— 46712				— 34667	
0,08	9,9093285		+ 296	0,58	9,7086202		+ 190
		— 46416				— 34477	
0,09	9,9046869		+ 291	0,59	9,7051725		+ 191
		— 46125				— 34286	
0,10	9,9000744		+ 290	0,60	9,7017439		+ 190
		— 45835				— 34096	
0,11	9,8954909		+ 287	0,61	9,6983343		+ 187
		— 45548				— 33909	
0,12	9,8909361		+ 286	0,62	9,6949434		+ 187
		— 45262				— 33722	
0,13	9,8864099		+ 283	0,63	9,6915712		+ 184
		— 44979				— 33538	
0,14	9,8819120		+ 279	0,64	9,6882174		+ 182
		— 44700				— 33356	
0,15	9,8774420		+ 278	0,65	9,6848818		+ 182
		— 44422				— 33174	
0,16	9,8729998		+ 275	0,66	9,6815644		+ 180
		— 44147				— 32994	
0,17	9,8685851		+ 273	0,67	9,6782650		+ 179
		— 43874				— 32815	
0,18	9,8641977		+ 271	0,68	9,6749835		+ 175
		— 43603				— 32640	
0,19	9,8598374		+ 269	0,69	9,6717195		+ 177
		— 43334				— 32463	
0,20	9,8555040		+ 266	0,70	9,6684732		+ 172
		— 43068				— 32291	
0,21	9,8511972		+ 262	0,71	9,6652441		+ 175
		— 42806				— 32116	
0,22	9,8469166		+ 262	0,72	9,6620325		+ 170
		— 42544				— 31946	
0,23	9,8426622		+ 260	0,73	9,6588379		+ 170
		— 42284				— 31776	
0,24	9,8384338		+ 257	0,74	9,6556603		+ 167
		— 42027				— 31609	
0,25	9,8342311		+ 255	0,75	9,6524994		+ 170
		— 41772				— 31439	
0,26	9,8300539		+ 252	0,76	9,6493555		+ 162
		— 41520				— 31277	
0,27	9,8259019		+ 251	0,77	9,6462278		+ 166
		— 41269				— 31111	
0,28	9,8217750		+ 249	0,78	9,6431167		+ 162
		— 41020				— 30949	
0,29	9,8176730		+ 245	0,79	9,6400218		+ 162
		— 40775				— 30787	
0,30	9,8135955		+ 245	0,80	9,6369431		+ 161
		— 40530				— 30626	
0,31	9,8095425		+ 242	0,81	6,6338805		+ 157
		— 40288				— 30469	
0,32	9,8055137		+ 239	0,82	9,6308336		+ 159
		— 40049				— 30310	
0,33	9,8015088		+ 238	0,83	9,6278026		+ 156
		— 39811				— 30154	
0,34	9,7975277		+ 237	0,84	9,6247872		+ 155
		— 39574				— 29999	
0,35	9,7935703		+ 235	0,85	9,6217873		+ 154
		— 39339				— 29845	
0,36	9,7896364		+ 230	0,86	9,6188028		+ 151
		— 39109				— 29694	
0,37	9,7857255		+ 229	0,87	9,6158334		+ 152
		— 38880				— 29542	
0,38	9,7818375		+ 230	0,88	9,6128792		+ 151
		— 38650				— 29391	
0,39	9,7779725		+ 226	0,89	9,6099401		+ 148
		— 38424				— 29243	
0,40	9,7741301		+ 223	0,90	9,6070158		+ 148
		— 38201				— 29095	
0,41	9,7703100		+ 222	0,91	9,6041063		+ 146
		— 37979				— 28949	
0,42	9,7665121		+ 221	0,92	9,6012114		+ 146
		— 37758				— 28803	
0,43	9,7627363		+ 220	0,93	9,5983311		+ 144
		— 37538				— 28659	
0,44	9,7589825		+ 215	0,94	9,5954652		+ 143
		— 37323				— 28516	
0,45	9,7552502		+ 215	0,95	9,5926136		+ 142
		— 37108				— 28374	
0,46	9,7515394		+ 213	0,96	9,5897762		+ 139
		— 36895				— 28235	
0,47	9,7478499		+ 210	0,97	9,5869527		+ 140
		— 36685				— 28095	
0,48	9,7441814		+ 210	0,98	9,5841432		+ 140
		— 36475				— 27955	
0,49	9,7405339		+ 208	0,99	9,5813477		+ 138
		— 36267				— 27817	
0,50	9,7369072		+ 207	1,00	9,5785660		+ 138

Digitized by Google

Tafel II.

Logarithmus des Integrals $e^{TT}\int_T^\infty e^{-tt}\,dt$.

Argument log. T.

Argum. log. T	Logarithmus des Integrals	Differenz I.	Differenz II.	Argum. log. T	Logarithmus des Integrals	Differenz I.	Differenz II.
0,00	9,5785660			0,50	9,1794673		
		— 64271				— 92013	— 309
0,01	9,5721389		— 746	0,51	9,1702660		— 301
		— 65017				— 92314	
0,02	9,5656372		— 742	0,52	9,1610346		— 291
		— 65759				— 92605	
0,03	9,5590613		— 738	0,53	9,1517741		— 282
		— 66497				— 92887	
0,04	9,5524116		— 735	0,54	9,1424854		— 272
		— 67232				— 93159	
0,05	9,5456884		— 729	0,55	9,1331695		— 264
		— 67961				— 93423	
0,06	9,5388923		— 726	0,56	9,1238272		— 256
		— 68687				— 93679	
0,07	9,5320236		— 720	0,57	9,1144593		— 245
		— 69407				— 93924	
0,08	9,5250829		— 716	0,58	9,1050669		— 239
		— 70123				— 94163	
0,09	9,5180706		— 707	0,59	9,0956506		— 230
		— 70830				— 94393	
0,10	9,5109876		— 704	0,60	9,0862113		— 223
		— 71534				— 94616	
0,11	9,5038342		— 695	0,61	9,0767497		— 214
		— 72229				— 94830	
0,12	9,4966113		— 689	0,62	9,0672667		— 206
		— 72918				— 95036	
0,13	9,4893195		— 681	0,63	9,0577631		— 200
		— 73599				— 95236	
0,14	9,4819596		— 676	0,64	9,0482395		— 192
		— 74275				— 95428	
0,15	9,4745321		— 665	0,65	9,0386967		— 184
		— 74940				— 95612	
0,16	9,4670381		— 660	0,66	9,0291355		— 180
		— 75600				— 95792	
0,17	9,4594781		— 649	0,67	9,0195563		— 171
		— 76249				— 95963	
0,18	9,4518532		— 642	0,68	9,0099600		— 166
		— 76891				— 96129	
0,19	9,4441641		— 633	0,69	9,0003471		— 159
		— 77524				— 96288	
0,20	9,4364117		— 622	0,70	8,9907183		— 154
		— 78146				— 96442	
0,21	9,4285971		— 615	0,71	8,9810741		— 147
		— 78761				— 96589	
0,22	9,4207210		— 605	0,72	8,9714152		— 142
		— 79366				— 96731	
0,23	9,4127844		— 594	0,73	8,9617421		— 136
		— 79960				— 96867	
0,24	9,4047884		— 586	0,74	8,9520554		— 131
		— 80546				— 96998	
0,25	9,3967338		— 574	0,75	8,9423556		— 127
		— 81120				— 97125	
0,26	9,3886218		— 565	0,76	8,9326431		— 120
		— 81685				— 97245	
0,27	9,3804533		— 554	0,77	8,9229186		— 117
		— 82239				— 97362	
0,28	9,3722294		— 543	0,78	8,9131824		— 111
		— 82782				— 97473	
0,29	9,3639512		— 534	0,79	8,9034351		— 108
		— 83316				— 97581	
0,30	9,3556196		— 522	0,80	8,8936770		— 102
		— 83838				— 97683	
0,31	9,3472358		— 511	0,81	8,8839087		— 100
		— 84349				— 97788	
0,32	9,3388009		— 500	0,82	8,8741304		— 94
		— 84849				— 97877	
0,33	9,3303160		— 490	0,83	8,8643427		— 90
		— 85339				— 97967	
0,34	9,3217821		— 479	0,84	8,8545460		— 89
		— 85818				— 98056	
0,35	9,3132003		— 468	0,85	8,8447404		— 82
		— 86286				— 98138	
0,36	9,3045717		— 456	0,86	8,8349266		— 81
		— 86742				— 98219	
0,37	9,2958975		— 447	0,87	8,8251047		— 77
		— 87189				— 98296	
0,38	9,2871786		— 434	0,88	8,8152751		— 74
		— 87623				— 98370	
0,39	9,2784163		— 424	0,89	8,8054381		— 70
		— 88047				— 98440	
0,40	9,2696116		— 413	0,90	8,7956941		— 68
		— 88460				— 98508	
0,41	9,2607656		— 403	0,91	8,7857433		— 65
		— 88863				— 98573	
0,42	9,2518793		— 391	0,92	8,7758860		— 61
		— 89254				— 98634	
0,43	9,2429539		— 381	0,93	8,7660226		— 61
		— 89635				— 98695	
0,44	9,2339904		— 371	0,94	8,7561531		— 56
		— 90006				— 98751	
0,45	9,2249898		— 360	0,95	8,7462780		— 55
		— 90366				— 98806	
0,46	9,2159532		— 350	0,96	8,7363974		— 52
		— 90716				— 98858	
0,47	9,2068816		— 339	0,97	8,7265116		— 50
		— 91055				— 98908	
0,48	9,1977761		— 329	0,98	8,7166208		— 48
		— 91384				— 98956	
0,49	9,1886377		— 320	0,99	8,7067252		— 46
		— 91704				— 99002	
0,50	9,1794673		— 309	1,00	8,6968250		— 44

Digitized by Google

§ 5.

Theorie der Refraction von Laplace.

In § 3 haben wir gesehen, dass weder die Cassini'sche, noch die Simpson'sche, noch die Newton'sche Theorie die beobachtete Horizontalrefraction wieder giebt, wir haben gesehen, dass bei dem Barometerstande 0,76 M., nach Cassini die Atmosphäre nur 7974 Meter hoch sein kann und auf unsern höchsten Bergspitzen müssten in Folge dessen die Barometer auf 0 Meter stehen, jeder aber weiss, dass dies nicht der Fall ist. Damit die Barometerhöhe um 1 Linie abnehme, brauchte man sich dann immer nur 24 Meter etwa zu erheben und obwohl dies an der Oberfläche der Erde nahe richtig ist, so hört es doch auf richtig zu sein, sobald man in einiger Höhe angelangt ist.

Die Simpson'sche Theorie giebt die Höhe der Atmosphäre h doppelt so hoch oder 2 Meilen; der Dämmerung zufolge wissen wir, dass dies viel zu gering ist. Es ist nach der Simpson'schen Theorie, wie wir in § 3 gesehen, nahe

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}$$

daher

$$\frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus der daselbst benutzten Gleichung

$$a + h - r = \frac{h\,\varrho}{\varrho_0} \text{ folgt } \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{a + h - r}{h} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Bei gleicher Temperatur ist der Druck der Luft der Dichtigkeit proportional, also $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$, es entspricht daher der Druck $\frac{p}{p_0}$ (bei constanter Temperatur) dem Drucke $\frac{p}{p_0}$ bei veränderlicher Temperatur (der Simpson'schen Theorie angemessen), wenn wir diesen Druck noch multipliciren mit $\frac{\varrho_0}{\varrho}$. Die Function $\frac{p}{p_0}\,\frac{\varrho_0}{\varrho}$ ist daher das Gesetz der Wärme in den verschiedenen Luftschichten und wir können setzen ganz allgemein

$$\frac{p}{p_0}\,\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{1 + m\,\tau}{1 + m\,\tau_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

wo τ, τ_0 die Temperaturen, m den Ausdehnungscoefficient der Luft bezeichnet, oder

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}\,\frac{1 + m\,\tau_0}{1 + m\,\tau}$$

Verglichen mit (1) erhalten wir der Simpson'schen Theorie gemäss

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{1 + m\,\tau_0}{1 + m\,\tau} = \frac{h}{a + h - r} = \frac{2\,l}{2\,l - x}$$

wenn wir $r = a + x$ setzen.

Digitized by Google

Nach den Experimenten von Gay Lussac ist m = 0,00375 für 1° C. und setzen wir $\tau_0 = 0$, $\tau = -1°$, so haben wir

$$\frac{1}{0{,}99625} = \frac{2\,l}{2\,l - x}$$

woraus, bei dem Werthe von l = 7974 Meter, x etwa 60 Meter folgt.

Nach Simpson nimmt mithin bei 0° Temperatur an der Oberfläche der Erde durch ein Aufsteigen von 60 Meter die Temperatur um 1° C. ab; jeder weiss, dass die Abnahme viel langsamer ist und die Simpson'sche Hypothese widerspricht auf 2 verschiedene Arten den physischen Gesetzen der Atmosphäre.

Dass die Newton'sche Hypothese den Gesetzen auch nicht entspricht, ist bekannt, denn dann dürfte es auf den Bergen nicht kälter sein, als im Thal, dann würde nicht ewiger Schnee die Gipfel der hohen Berge zieren können. Simpson's Theorie giebt die Horizontalrefraction bei 0,76 Meter Barometerstand und 0° Temperatur 30′ 24,6, Newton's Theorie unter denselben Bedingungen 39′ 54,6. Die beobachtete Horizontalrefraction liegt fast in der Mitte und Laplace nimmt daher für die Abnahme der Dichtigkeit der Luft eine Function an, die aus einem arithmetischen und einem geometrischen Factor besteht.

Laplace setzt, wenn wir die frühern Bezeichnungen beibehalten,

(a) . . . . . $\varrho = \varrho_0 \left(1 + \frac{f\,u}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}}$

wo f und m näher zu bestimmende Constanten sind, und

(b) . . . . . $u = s - \alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$ bezeichnet.

Die Gleichung (C) des § 2 lässt sich schreiben mit den in § 3 aufgeführten Abkürzungen [1]):

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha\, d\varrho \sin z \frac{1}{\varrho_0}}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) + 2s - 2s\cos^2 z}}$$

Da s, so lange es merklich, ein kleiner Bruch ist und wir ausserdem z nur zwischen 70 und 90 Grad nehmen wollen, $\cos^2 z$ daher auch klein ist, so können wir ohne merklichen Fehler $2s\cos^2 z$ vernachlässigen und haben

(c) . . . . $d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha \frac{d\varrho}{\varrho_0} \sin z}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) + 2s}}$

[1]) Die Abkürzungen sind: $1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = 1 - \alpha$; ferner ist im Nenner s^2 nicht mitgenommen — auch ist das 2te Glied in (16) § 3 vernachlässigt. Man braucht auch in (17) § 3 statt s durch die Gleichung $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{as}{l}}$ nur ϱ einzuführen, um obige Formel zu erhalten.

Digitized by Google

Aus Gleichung (a) ist

$$d\varrho = \left\{ -\frac{\varrho_0}{m}\left(1 + \frac{fu}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}} + \varrho_0 \frac{f}{m} e^{-\frac{u}{m}} \right\} du$$

$$= -\frac{\varrho_0}{m}\left(1 - f + \frac{fu}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}} du$$

Dies in (c) substituirt und durch (b) für s die Variable u eingesetzt, so hat man:

$$d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha\left(1 - f + \frac{fu}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}} \sin z \frac{du}{m}}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2u}}$$

Führt man eine neue Veränderliche t ein durch:

(d) . . . . . $\cos^2 z + 2u = 2mt^2$

wodurch

$$\frac{du}{m} = 2t\,dt$$

wird, so hat man

(e) . . . . . $d(\delta\vartheta) = \frac{2\alpha \sin z\, dt}{(1-\alpha)\sqrt{2m}} \left\{ 1 - f - \frac{f\cos^2 z}{2m} + ft^2 \right\} e^{\frac{\cos z^2}{2m} - t^2}$

Dieser Ausdruck muss integrirt werden und zwar zwischen den Grenzen $\frac{\cos z}{\sqrt{2m}} = T$ und ∞, denn die Grenzen von ϱ sind 0 und ϱ_0

die von u sind ∞ und 0 aus (a)

die von t sind ∞ und $\sqrt{\frac{\cos^2 z}{2m}}$ aus (d)

Integriren wir (e), so erhalten wir:

(A) . . $\delta\vartheta = \frac{2\alpha \sin z}{(1-\alpha)\sqrt{2m}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}f - fT^2 \right\} e^{TT} \int_T^\infty e^{-tt}\, dt + \frac{\alpha f}{2(1-\alpha)m} \sin z \cos z$

Für die Horizontalrefraction ist $\cos z = 0$, also auch $T = 0$, $\sin z = 1$ und da

$$\int_0^\infty e^{-tt}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist, kommt

(f) . . . . . $\delta\vartheta = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{(1-\alpha)\sqrt{2m}}(1 - \frac{1}{2}f)$

woraus man sieht dass $f < 2$ sein muss, denn sonst käme eine negative Horizontalrefraction.

Da in (f) 2 Constanten sind, die wir noch nicht kennen, so reicht die Kenntniss der Horizontalrefraction allein noch nicht hin, wir müssen noch eine

Digitized by Google

Relation zwischen m und f und bekannten Grössen kennen, um beide Grössen f und m zu bestimmen. Diese Relation findet sich zwischen f, m, a, l, α und zwar ist nach (6) in § 3

$$dp = -g_0 \frac{a^2}{r^2} \varrho \, dr$$
$$= -g_0 a \varrho \, ds,$$

wenn man $\frac{a}{r} = 1 - s$ nimmt.

Nach unserer Hypothese ist:

$$s = u + \alpha \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$$

daher

$$ds = du - \alpha \frac{d\varrho}{\varrho_0}$$

und

$$dp = -g_0 a \varrho \, du + \alpha g_0 a \frac{\varrho}{\varrho^0} d\varrho$$

und da

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + \frac{f u}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}}$$

und

$$p_0 = g_0 \varrho_0 l$$

ist, so wird

$$\frac{dp}{p^0} = -\frac{a}{l} \left(1 + \frac{fu}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}} du + \frac{\alpha a}{l} \frac{\varrho \, d\varrho}{\varrho_0^2}$$

und integrirt man, so erhält man:

$$(g) \ldots\ldots \frac{p}{p_0} = \frac{am}{l} \left(1 + \frac{fu}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}} + f \frac{am}{l} e^{-\frac{u}{m}} + \frac{\frac{1}{2}\alpha a}{l} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} + \text{Const.}$$

$$= \frac{am}{l} \frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{f \frac{am}{l}}{1 + \frac{fu}{m}} \frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{\frac{1}{2}\alpha a}{l} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} + \text{Const.}$$

woraus hervor geht, dass die Constante, da mit p auch $\varrho = 0$ wird, gleich 0 ist.

An der Oberfläche der Erde ist $p = p_0$, $\varrho = \varrho_0$, $u = 0$ und wir haben

$$1 = \frac{am}{l} + f \frac{am}{l} + \frac{\frac{1}{2}\alpha a}{l}$$

oder:

$$m(1 + f) = \frac{l}{a} - \frac{1}{2}\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

oder:

$$f = \frac{l}{am} - \frac{\alpha}{2m} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

Setzt man diesen Werth von f in die Gleichung (f) ein, so erhält man

$$\delta\theta = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{(1 - \alpha)\sqrt{2m}} \left\{1 - \frac{1}{2am} + \frac{\alpha}{4m} + \frac{1}{2}\right\}$$

Digitized by Google

woraus

$$(\delta\vartheta)^2 (1-\alpha)^2 \cdot 8\,m^2 = \alpha^2 \pi \left\{3m - \frac{l}{a} + \frac{\alpha}{2}\right\}^2 \text{ folgt.}$$

Laplace nimmt für die Horizontalrefraction

$$\delta\vartheta = 35'\,6'',0 = 0{,}01021018,\ l = 7974 \text{ Meter},$$
$$a = 6366198 \text{ Meter},\ \alpha = 0{,}000293876$$

und findet für m und f die 3 Werthe:

$$m = +\,0{,}001906483,\ +\,0{,}000741829,\ +\,0{,}000281350$$
$$f = -\,0{,}420077,\quad +\,0{,}490390,\quad +\,2{,}529670$$

Da f nicht über 2 sein darf, können die letzten Werthe nicht angenommen werden und auch die ersten entsprechen nicht der Temperaturabnahme. Mit den mittlern ist:

$$u = s - 0{,}000293876\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \text{ und } \varrho = \varrho_0 (1 + u \,.\, 661{,}107)\, e^{-1348{,}04\,u}$$

die Gleichung (g) wird:

$$\frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = 0{,}592243 + \frac{0{,}290448}{1 + u \,.\, 661{,}107} + 0{,}\,117311\,\frac{\varrho}{\varrho_0}$$

Nach den Beobachtungen von Gay Lussac in einem Luftballon war in einer Höhe von 6980 Meter der Barometerstand 0,3288 Meter und das Thermometer zeigte — 9°,5 Grad, während in Paris dieselben Grössen 0,76568 M. und + 30°,75 waren.

Laplace setzt $u = 0{,}00092727$, damit wird $\frac{\varrho}{\varrho_0} = +\,0{,}46214$

$$as = 6969,^{m}44;\ \frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = 0{,}8266,$$

$$\frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = 1 + 0{,}00375\,t = 0{,}8266$$

welches für t die Temperaturdifferenz zwischen unten und oben

$$t = -\,46°{,}24 \quad \text{giebt}$$

und diese Uebereinstimmung mit der Differenz zwischen — 9°,5 und + 30,75 hält Laplace für genügend.

Nimmt man die Höhe von 6980^{m} als richtig an, und setzt

$$u = 0{,}00093604, \text{ so ist } \frac{\varrho}{\varrho_0} = 0{,}458352;\quad s = 0{,}00109522$$

$$as = 6972^{m},36;\ r - a = 6980^{m};\ \frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = 0{,}82730;\ \frac{p}{p_0} = 0{,}37919$$

und

$$\frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = \frac{1 + 0{,}00375\,t}{1 + 0{,}00375\,t_0} = 0{,}82730,$$

woraus, wenn man t_0 zu + 30°,75 annimmt, t = — 20°,7 folgt, eine Uebereinstimmung, die nicht so gut als die Laplace'sche ist, die ich aber für richtiger halte. Die Barometerhöhe weicht noch mehr ab, denn da

$$\frac{p}{p_0} = 0{,}37919,\ p_0 \text{ bei } 30°{,}75 = 0{,}76568,$$

Digitized by Google

so ist $p = 0{,}37919 \times 0{,}76568 = 0{,}29033$ bei $30^0{,}75$

und beobachtet wurde 0,3288 Meter bei $-\ 9^0{,}5$, welches für $+\ 30^0{,}75$ wegen Ausdehnung des Quecksilbers 0,33117 Meter ausmacht, so dass die Differenz 0,041 M. = 18 Linien beträgt.

Thomas Young nimmt darauf Rücksicht und stellt in Folge dessen eine andere Hypothese auf.

Würde man für m und f die ersten Werthe nehmen, so hätte man $u = 0.000943$, $\frac{\varrho}{\varrho_0} = 0{,}485$, $\frac{p\,\varrho_0}{p_0\,\varrho} = 0.773$, $t = -61^0$, also noch weniger übereinstimmend. [1])

Die Formel (A) giebt die Refraction an, das darin vorkommende Integral haben wir im vorigen Paragraphen gelöst. Die numerischen Werthe nach Laplace eingesetzt geben:

$$\delta\vartheta = 2790'',157\,(0.75479 - 0{,}49042\,T^2)\sin z\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{TT}\int_T^{\infty} e^{-tt}\,dt + 10021'',343\sin 2z \ldots (B)$$

worin $T = 25.961924 \cos z$.

Diese Formel ist für grössere Zenithdistanzen anzuwenden, für kleinere bis zu etwa 80^0 leitet Laplace eine Formel auf folgende Art ab, ohne irgend eine Hypothese über die Dichtigkeit vorauszusetzen.

Nach (C) § 2 ist:

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha\,\frac{d\varrho}{\varrho 0}\,(1-s)\sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho 0}\right)\cos z} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho 0}\right)\sec^2 z + 2s - s^2\tan^2 z}}$$

Entwickelt man den letzten Factor in eine Reihe, so hat man:

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha\,\frac{d\varrho}{\varrho_0}\,(1-s)\tan z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}\left\{1 + \frac{\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}{\cos^2 z} - (s - \tfrac{1}{2}s^2)\tan^2 z + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}{\cos^2 z} - (s - \tfrac{1}{2}s^2)\tan^2 z\right\}^2 + \ldots\right.$$

Nach Potenzen von s geordnet und nur die ersten Potenzen mitgenommen, kommt

$$d(\delta\vartheta) = -\alpha\,\frac{d\varrho}{\varrho_0}\tan z\left\{1 + 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right\}(1-s)\left\{1 + \frac{\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}{\cos^2 z} - s\tan^2 z\right\}$$

---

[1]) Plana in seinen Recherches sur la refraction pag. 203 giebt noch einen andern Grund für die Ausschliessung dieser ersten Werthe an, der mir nicht recht zulässig erscheint. Mit den ersten Werthen ist

$$\varrho = \varrho_0\left\{1 - u.220{,}341\right\}e^{-u.524{,}526}$$

Um $\varrho = 0$ zu machen, setzt Plana $u = \frac{1}{220.341}$, damit wird $s = \frac{1}{220.341} + 0.000293876 = 0.0048323 = 30763$ Meter für die Höhe der Atmosphäre, welches Plana unzulässig findet. Würde man dasselbe Manöver auf die mittlern Werthe anwenden, so käme für die Höhe der Atmosphäre ein negativer Werth, welcher noch viel unmöglicher ist.

Digitized by Google

oder

$$d(\delta\vartheta) = -\alpha \frac{d\varrho}{\varrho_0} \operatorname{tg} z \left\{ 1 - \frac{s}{\cos^2 z} + \alpha \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0} \right) \frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} \right\}$$

welches integrirt zwischen den Grenzen $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = 0$ giebt:

$$\delta\vartheta = \alpha \operatorname{tg} z \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\alpha \frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} + \frac{1}{\cos^2 z} \int \frac{s\, d\varrho}{\varrho_0} \right\}$$

Nach der theilweisen Integration ist:

$$\int s \frac{d\varrho}{\varrho_0} = s \frac{\varrho}{\varrho_0} - \int \frac{\varrho}{\varrho_0} ds$$

$$= 0 - \int_0^1 \frac{\varrho}{\varrho_0} ds$$

wenn man die Grenzen einsetzt, die $s = 0$ für $\varrho = \varrho_0$, $s = 1$ für $\varrho = 0$ und $r = \infty$ sind.

Nach pag. 117 ist

$$dp = -g_0 a \varrho\, ds$$

also

$$p = -g_0 a \int \varrho\, ds$$

oder

$$\int \varrho\, ds = -\frac{p}{g_0 a}$$

und für die richtigen Grenzen

$$\int_0^1 \frac{\varrho}{\varrho_0} ds = -\frac{p_0}{g_0 \varrho_0 a} = -\frac{1}{a}.$$

Dies eingesetzt in die obige Formel für $\delta\vartheta$ giebt:

$$\text{(C)} \quad \delta\vartheta = \alpha \operatorname{tg} z \left\{ 1 + \frac{\tfrac{1}{2}\alpha(2\cos^2 z + 1) - \frac{1}{a}}{\cos^2 z} \right\}$$

ein Ausdruck, der von jeder Hypothese über die Dichtigkeit frei ist [1]). Er lässt sich auch schreiben, da

$$\frac{\tfrac{1}{2}\alpha(2\cos^2 z + 1) - \frac{1}{a}}{\cos^2 z} = \alpha + \frac{\alpha}{2\cos^2 z} - \frac{1}{a\cos^2 z}$$

und

$$\frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \operatorname{tg}^2 z,$$

also

$$\frac{\tfrac{1}{2}\alpha(2\cos^2 z + 1) - \frac{1}{a}}{\cos^2 z} = \tfrac{3}{2}\alpha - \frac{1}{a} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{a} \right) \operatorname{tg}^2 z \text{ ist,}$$

$$\text{(D)} \quad \delta\vartheta = \alpha \left\{ \left(1 + \tfrac{3}{2}\alpha - \frac{1}{a} \right) \operatorname{tg} z - \left(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg}^3 z \right\}$$

und setzt man die von Laplace gebrauchten Werthe ein, so hat man:

$$\delta\vartheta = 60{,}567 \operatorname{tg} z - 0'',06702 \operatorname{tg}^3 z.$$

---

[1]) Oriani fand schon dasselbe, s. § 16 des vorigen Abschnitts.

Digitized by Google

§ 9.

Veränderung der Refraction durch Barometer und Thermometer. Einfluss der Feuchtigkeit nach Laplace.

Die eben entwickelten Formeln mit den Zahlen gelten für einen bestimmten Zustand der Atmosphäre, sie gelten, wenn die Höhe des Barometers 0,76 Meter beträgt und das Thermometer auf dem Gefrierpunct in 0° C. steht. Sobald sich die Dichtigkeit der Luft ändert, ist auch die brechende Kraft und mit ihr α eine andere Grösse, auch l ist variable.

Es seien t die Grade, die ein Thermometer, nach Celsius getheilt, anzeigt, so haben die Versuche von Gay-Lussac [1]) gelehrt, dass ein Volumen Luft, welches bei 0° die Einheit darstellt, bei t Graden

$$1 + 0{,}00375\,t$$

an Volumen hat.

Die Dichtigkeit ist ferner proportional dem Drucke der Luft; wir haben, sobald das Barometer $0^m{,}76$ zeigt, den Druck gleich der Einheit gesetzt. Die Höhe des Barometers sei $0^m{,}76\ (1 + y)$, wo man y wegen der Ausdehnung des Quecksilbers ($\frac{1}{5412}$ nach Gay-Lussac pro Grad, $\frac{1}{5550}$ nach Rudberg und Regnault) bereits corrigirt denkt, so hat man für die Dichtigkeit der Luft:

$$\frac{1 + y}{1 + 0{,}00375\,t}$$

und statt der brechenden Kraft α

$$\frac{\alpha(1 + y)}{1 + 0{,}00375\,t}$$

Es ist ferner nach Laplace bei $0^m{,}76$ Barometerstand und 0° Wärme,

$$l = 7974 \text{ Meter.}$$

Die Gleichung $p_0 = l g_0 \varrho_0$ zeigt uns, dass l gar nicht durch das Barometer verändert wird, p_0 allein proportional dem ϱ_0 ist. Sobald aber ϱ_0 seine Temperatur ändert, ändert sich auch l und zwar umgekehrt, es ist daher

$$l = 7974\ \text{M.}\ (1 + 0{,}00375\,t).$$

Substituiren wir diese Werthe in unsre Formel (C), so haben wir

$$\delta\theta = \frac{\alpha(1 + y)\,\text{tg}\,z}{1 + 0{,}00375\,t} + \frac{\frac{1}{2}\alpha^2(1 + y)^2}{(1 + 0{,}00375\,t)^2}\ \frac{(1 + 2\cos^2 z)}{\cos^2 z}\,\text{tg}\,z$$
$$- \alpha(1 + y)\,0{,}0012525\,\frac{\text{tg}\,z}{\cos^2 z}$$

Es ist noch zu untersuchen, ob die Feuchtigkeit in der Atmosphäre Einfluss auf die Refraction hat und ob dieser, wenn er vorhanden, von Bedeutung ist.

[1]) Nach Experimenten von Rudberg und Regnault ist die Ausdehnung für 1° Wärme 0,003665.

Digitized by Google

Nach der Dalton'schen Theorie ist die mit Wasserdämpfen gesättigte Atmosphäre gerade so voll von Wasserdämpfen, als ein gleicher leerer Raum es sein würde, die Molecüle des Wasserdampfes erleiden durch die Molecüle der Luft keine Beeinträchtigung, beide sind so neben einander da, als wenn nur eins vorhanden wäre.

Die Experimente haben gelehrt, dass die Wasserdämpfe sich durch die Wärme fast ebenso ausdehnen, als die Gasarten, und bei gleichen Temperaturen ist die Dichtigkeit des Wasserdampfs ebenso dem Drucke proportional, wie die der Luft. In einem leeren Raum wächst mit der Temperatur die Elasticität des Wasserdampfes, die der brechenden Kraft proportional ist, und zwar, wenn die Temperatur in arithmetischer Progression zunimmt, vermehrt sich die Elasticität nahe in geometrischer Progression. Dalton hat auch hierüber Versuche angestellt und Laplace nimmt an als Function zwischen der Temperatur und der Elasticität den Ausdruck:

$$\text{Elasticität} = 0{,}^{m}76\,(10)^{i\,.\,0{,}0154547\,-\,i^2\,.\,0.0000625826}$$

wo i die Grade des hunderttheiligen Thermometers über 100^0 bezeichnet.

Die Wirkung der feuchten Luft ist zusammengesetzt aus der Wirkung der trocknen Luft und der des Wasserdampfes. Das Verhältniss der Wirkungen sei wie

$$q : p$$

wo q für 0^0 Temperatur und $0^m{,}76$ Barometerstand gelte.

Die brechende Kraft des Wasserdampfes für diesen Normalzustand sei im leeren Raume $\zeta . 0^m{,}76$, so ist klar, dass die Wirkung auf das Licht bei dieser Temperatur durch die feuchte Luft um die Grösse

$$\zeta(p - q)$$

vermehrt wird und bei t Graden Temperatur beträgt diese Vermehrung

$$\frac{\zeta(p - q)}{1 + 0{,}00375\,t}$$

Um $p - q$ zu bestimmen, setzt Laplace voraus, dass die Wirkungen des Wassers und seines Dampfes auf das Licht den Dichtigkeiten proportional sind, oder, dass die Grösse $\frac{2N}{c^2}$ für beide Theile dieselbe ist. Diese Hypothese ist analog der Erfahrung über die brechende Kraft der Atmosphäre, die der Dichtigkeit auch proportional ist.

Der Brechungscoefficient des Wassers, wenn der Strahl aus dem leeren Raume kommt, ist nach Newton:

$$\frac{529}{396}$$

die brechende Kraft:

$$\frac{4N}{c^2}\varrho = \left(\frac{529}{396}\right)^2 - 1$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Wassers bedeutet. Nach den Versuchen von Dalton, Saussure, Wath ist die Dichtigkeit des Wasserdampfs in der Luft, wenn er mit ihr gleiche Temperatur hat,

Digitized by Google

$\frac{1}{11}$ der Dichtigkeit der Luft,

und nach Lavoisier ist bei 12°,5 Temperatur und 0,76 Meter Barometer die Dichtigkeit des Wassers

842 Mal grösser, als die der Luft.

Nennt man $\zeta\varrho'$ die Dichtigkeit des Wasserdampfes, so ist seine brechende Kraft

$$\frac{4N}{c^2}\zeta\varrho' = \frac{10\zeta}{14.842}\left\{\left(\frac{529}{396}\right)^2 - 1\right\}$$
$$= 137'',272\,\zeta$$

also

$$\frac{2N}{c^2}\zeta\varrho' = 68'',636\,\zeta$$

und wenn man auf 0 Grad Temperatur reducirt, indem diese Grösse für 12°,5 gilt, man daher mit $1 + 0.00375 \times 12.5$ multipliciren muss, kommt:

$$\frac{2N}{c^2}\zeta\varrho' = 71'',853\,\zeta$$

Bei der Luft ist diese Grösse

$$\frac{2N}{c^2}\zeta\varrho' = \alpha\zeta = 60'',617\,\zeta$$

mithin

$$\frac{(p-q)\,\zeta}{1 + 0.00375\,t} = \frac{11'',24\,\zeta}{1 + 0.00375\,t}$$

Die Refraction ist nahe proportional α tg z, folglich wird durch die vollkommen feuchte Luft die Refraction vermehrt um

$$\frac{11'',24}{1 + 0.00375\,t}\,\zeta\,\mathrm{tg}\,z$$

Zur Bestimmung von ζ dient die obige Gleichung, welche Laplace aus den Dalton'schen Beobachtungen hergeleitet hat, es ist

$$0{,}76\,\zeta = 0{,}76\,(10)^{1\,.\,0{,}0154547\,-\,1^2\,.\,0{,}0000625826}$$

oder

$$\lg\zeta = -(100 - t)\,0.0154547 - (100 - t)^2\,0{,}0000625826.$$

Berechnet man ζ für $t = 15, 20, 25, 30, 35, 40°$ C., so findet sich die Vermehrung der Refraction

für 15° C. Temperatur	0″182 tg z
20	0,241 tg z
25	0,316 tg z
30	0,413 tg z
35	0,535 tg z
40	0,687 tg z

Da die Luft bei heiterm Himmel fast nie ganz feucht ist, so ist diese Correction gewöhnlich noch viel kleiner; Laplace ist der Meinung, dass man sie vernachlässigen kann, Bessel nimmt gar keine Rücksicht darauf, seine Refractionsconstante ist ebenso wie die von Laplace gebrauchte Delambre'-

Digitized by Google

sche aus den Beobachtungen direct abgeleitet und sie entspricht daher gewissermaassen der mittlern Feuchtigkeit. Bei Ivory und Biot kommen wir auf den Einfluss der Feuchtigkeit wieder zurück.

§ 7.

Die Theorie von Bessel — seine Correctionen durch das Barometer und Thermometer.

Wir haben gesehen, dass bei gleicher Temperatur, also nach dem Mariotte'schen Gesetz allein, die Dichtigkeit der Luft sich durch die Function:

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{a\,s}{l}}$$

darstellen lässt. Bessel behält die Exponentialfunction bei; um aber der Ungleichheit der Wärme zu genügen, fügt er einen Factor hinzu, er setzt

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{g-1}{g}\frac{a\,.\,s}{l}}$$

wo g eine durch die Beobachtungen zu bestimmende Constante ist.

Setzt man:

$$\frac{g-1}{g\,l}\,a = \beta$$

so hat man:

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\beta s}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung (C) des § 2 und führt die Rechnung grade so durch, wie wir es in § 3 nach der Newton'schen Hypothese gethan haben, so erhalten wir (wir brauchen überall statt $\frac{a}{l}$ nur die Grösse β zu setzen) schliesslich statt (33) in § 3 den Ausdruck für die Refraction, den Bessel hat, nämlich:

$$\text{(A)} \quad \delta\vartheta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\Psi_{(1)} + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\,2^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\Psi_{(2)} \\ + \frac{\alpha^2\beta^2}{1.2\sin^4 z}\,3^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\Psi_{(3)} + \frac{\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z}\,4^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{4\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\Psi_{(4)} \\ + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\text{wo } \Psi_{(i)} = e^{\frac{\beta i}{2}\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}} \int_{\frac{\cos z}{\sin z}\sqrt{\frac{\beta i}{2}}}^{\infty} e^{-tt}\,dt$$

bedeutet, ein Integral, welches in § 4 gelöst ist und wofür daselbst auch Tafeln gegeben sind.

Bessel, der die Bradley'schen Beobachtungen neu reducirte und daraus so schöne Resultate, die Fundamente der Astronomie, herleitete, fand auch

Digitized by Google

die Constanten der Refraction. Für den Barometerstand von 29,6 Engl. Zoll und 48°,75 [1]) Fahrenheit findet er

$$\alpha = 57'',538$$
$$g = 116865{,}8 \text{ Toisen}$$
$$a = 3269805 \text{ Toisen für Greenwich,}$$

mithin $\beta = 745{,}747$

Die mit diesen Constanten aus (A) berechneten Refractionen sind nach zahlreichen Beobachtungen in Königsberg noch zu multipliciren mit dem Factor

1,003282

den Bessel [2]) dadurch erklärt, dass man die von Bradley angewandten meteorologischen Instrumente nicht genau kennt und sehr leicht ein Fehler in dem Nullpunct seines Thermometers sein kann.

Um aus der mittlern Refraction die wahre zu bestimmen, müsste man wieder, wie Laplace es angab, α, l, β ändern und zwar ist für den Barometerstand b, wenn B der Normalbarometerstand d. h. der der mittlern Refraction entsprechende, für τ Grade Temperatur über die Normaltemperatur der Luft, für τ' Grade Temperatur des Quecksilbers über dessen Normaltemperatur,

$$\alpha = \alpha_0 \frac{b}{B} \frac{1}{1 + n\tau'} \frac{1}{1 + m\tau}$$
$$l = l_0 (1 + m\tau)$$
$$\beta = \frac{g - l}{g\, l}\, a$$

wo α_0, l_0 die Constanten für die mittlere Refraction, m den Ausdehnungscoefficient der Luft, n den des Quecksilbers bedeutet.

Die jedesmalige Berechnung schien Bessel zu unbequem und in der That ist sie es auch, er setzte daher wenn δr die wahre, $\delta\vartheta$ die mittlere Refraction bezeichnet:

$$\delta r = \left\{\delta\vartheta + \frac{d(\delta\vartheta)}{d\tau}\tau + \frac{d^2(\delta\vartheta)}{1.2\,d\tau^2}\tau^2\right\}\left\{1 + \frac{d(\delta\vartheta)}{\delta\vartheta . db}\left(\frac{b : B}{1 + \tau' n} - 1\right)\right\} \quad \ldots . \text{(a)}$$

oder um es logarithmisch bequemer zu haben:

$$\delta r = \left\{\frac{\delta\vartheta}{(1 + m\tau)^\lambda} + \left(\frac{d^2(\delta\vartheta)}{1.2.d\tau^2} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1.2} m^2 \delta\vartheta\right)\tau^2\right\}\left\{\frac{b : B}{1 + \tau' n}\right\}^A \quad \ldots \ldots \text{(b)}$$

Bis auf Glieder höherer Ordnung ist:

$$(1 + m\tau)^{-\lambda} = 1 - \lambda m\tau + \frac{\lambda.(\lambda + 1)}{1.2} m^2 \tau^2 \ldots .$$

mithin

$$\frac{\delta\vartheta}{(1 + m\tau)^\lambda} + \left(\frac{d^2(\delta\vartheta)}{1.2\,d\tau^2} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1.2} m^2 \delta\vartheta\right)\tau^2 = \delta\vartheta + \frac{d^2\delta\vartheta}{1.2\,d\tau^2}\tau^2 - \delta\vartheta . \lambda . m . \tau$$

[1]) Anfangs nahm Bessel 50° Fahrenheit, später wurde das Bradley'sche Thermometer untersucht und es zeigte sich, dass sein Nullpunct um 1°,25 zu corrigiren sei.

[2]) Königsberger Beobachtungen Band VII. Einleitung pag. XXVI.

Digitized by Google

und ebenso ist:

$$\left(\frac{b:B}{1+\tau' n}\right)^A = 1 + A\left(\frac{b:B}{1+\tau' n} - 1\right) + \ldots\ldots$$

so dass dadurch Gleichung (b) sich schreiben lässt:

$$\delta r = (\delta\theta + \frac{d^2(\delta\theta)}{1.2\,d\tau^2}\tau^2 - \delta\theta.\lambda.m.\tau)\left(1 + A\left\{\frac{b:B}{1+\tau' n} - 1\right\}\right)$$

und mit (a) verglichen folgt daraus

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{m.\delta\theta}\,\frac{d(\delta\theta)}{d\tau} \\ A &= \frac{1}{\delta\theta}\,\frac{d.\delta\theta}{db} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Kann man also $\frac{d.\delta\theta}{d\tau}$ und $\frac{d.\delta\theta}{db}$ bestimmen, so findet sich auch leicht λ und A und dies wollen wir in dem Folgenden sehen. Bezeichnet man in der Formel (A)

$$\frac{\alpha.\beta}{\sin^2 z} \text{ mit } x$$

so hat man:

$$(1-\alpha)\,\delta\theta = \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta}}.x \left\{\begin{aligned} & e^{-x}\,{}^1\!\Psi(1) + 2^{\frac{1}{2}}\,x\,e^{-2x}\,{}^1\!\Psi(2) \\ & + 3^{\frac{1}{2}}\,\frac{x^2}{1.2}\,e^{-3x}\,{}^1\!\Psi(3) + \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + n^{\frac{2n-3}{2}}\,\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,e^{-nx}\,{}^1\!\Psi(n) + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$= \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta}}.x \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{\frac{2n-3}{2}}\,\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,e^{-nx}\,{}^1\!\Psi(n)$$

$$= \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{\frac{2n-1}{2}}\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,e^{-nx}\,{}^1\!\Psi(n)$$

Setzt man der Kürze wegen

$$n^{\frac{2n-1}{2}}\,{}^1\!\Psi(n) = q_n$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n e^{-nx}}{1.2.3\ldots n}\,q_n = Q$$

so hat man einfach:

$$\text{(d)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1-\alpha)\,\delta\theta = \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta}}.Q$$

Aus den obigen Gleichungen zwischen α und α_0, l und l_0, β und β_0 sieht man leicht, dass

Digitized by Google

β nur nach τ, x und Q dagegen nach τ und b variabel sind. Durch Differentiation erhalten wir, wenn wir $1 - \alpha$ constant annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{d\,\tau} &= -\frac{1}{2}\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta\,\frac{1}{\beta}\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) + \sin^2 z\,\sqrt{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)\\
\frac{d^2\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{d\,\tau^2} &= -\frac{1}{2}\,\frac{d\,\delta\vartheta}{d\,\tau}\,\frac{1-\alpha}{\beta}\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) + \frac{1}{2}\,\delta\vartheta\,(1-\alpha)\,\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)^2\\
&\quad - \frac{1}{2}\,\delta\vartheta\,\frac{(1-\alpha)}{\beta}\left(\frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right) - \frac{1}{2}\sin^2 z\,\sqrt{\frac{4}{\beta^3}}\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)\left(\frac{dQ}{d\tau}\right) + \sin^2 z\,\sqrt{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{d^2Q}{d\tau^2}\right)\\
\frac{d(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{db} &= \sin^2 z\,\sqrt{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{dQ}{db}\right)
\end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dQ}{d\tau}\right) &= \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)\\
\left(\frac{d^2Q}{d\tau^2}\right) &= \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\right) + 2\left(\frac{d^2Q}{dx\,.\,d\beta}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)\\
&\quad + \left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)\left(\frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right)
\end{aligned}\right\} \text{(f)}$$

und $\left(\frac{dQ}{db}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)$

Es ist aber

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1-x}{x}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n\,e^{-xn}}{1.2.3..n}\,n\,q_n = \frac{1-x}{x}\,Q' \qquad \text{(g)}$$

wenn man

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n\,e^{-xn}}{1.2.3..n}\,n\,q_n = Q' \quad \text{nennt.}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\,Q' + \frac{(1-x)^2}{x^2}\,Q''$$

wo

$$Q'' = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n\,e^{-nx}}{1.2.3...n}\,n^2\,q_n \quad \text{bezeichnet.}$$

Ausserdem hat man:

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right) = \sum\frac{x^n\,e^{-nx}}{1.2.3...n}\left(\frac{d\,q_n}{d\,\beta}\right)$$

Um $\left(\frac{d\,q_n}{d\beta}\right)$ zu finden, ist nach unserer frühern Definition

$$q_n = n^{\frac{2n-1}{2}}\,\Psi(n) = n^{\frac{2n-1}{2}}\,e^{\frac{\beta n}{2}\cot g^2 z}\int_{\sqrt{\frac{\beta n}{2}}\cot g\,z}^{\infty} e^{-tt}\,dt$$

Digitized by Google

und wendet man hierauf den Satz aus der Integralrechnung an, dass wenn

$$W = \int_a^b f(x, r)\, dr$$

gegeben ist und nach r differentiirt werden soll und r in f(x, r), in a und b vorkommt,

$$\frac{dW}{dr} = -f(a, r)\frac{da}{dr} + f(b, r)\frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{d\{f(x, r)\}}{dr}\, dx$$

ist, so bekommt man, da in unserm Integral die Variable nur in der untersten Grenze vorkommt,

$$\left(\frac{d \cdot q_n}{d\beta}\right) = \left\{ n^{\frac{2n-1}{2}} e^{\frac{\beta n}{2}\cot g^2 z} \int_{\sqrt{\frac{\beta n}{2}}\cot g z}^{\infty} e^{-tt}\, dt \right\} \frac{n}{2}\cot g^2 z$$

$$- n^{\frac{2n-1}{2}} e^{\frac{\beta n}{2}\cot g^2 z} e^{-\frac{\beta n}{2}\cot g^2 z} \frac{d\left(\sqrt{\frac{\beta n}{2}}\cot g z\right)}{d\beta}$$

$$= \frac{n}{2}\cot g^2 z\, q_n - \frac{\cot g z \sqrt{\frac{\beta}{2}}\, n^n}{2\beta}$$

und

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right) = \frac{\cot g^2 z}{2} Q' - \frac{\cot g z}{2\sqrt{2\beta}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n e^{-nx}}{1.2.3..n}$$

Nun ist aber

$$\sum_{n-1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n e^{-nx}}{1.2.3...n} = x e^{-x} + \frac{2^2 x^2 e^{-2x}}{1.2} + \frac{3^3 x^3 e^{-3x}}{1.2.3} + \ldots.$$

und entwickelt man in Reihen

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

$$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1} + \frac{(2x)^2}{1.2} - \frac{(2x)^3}{1.2.3} + \frac{(2x)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

etc. etc.

so findet sich

$$(h) \ldots\ldots \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n e^{-nx}}{1.2.3..n} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

und dadurch wird:

$$(i) \ldots\ldots\ldots \left(\frac{dQ}{d\beta}\right) = \frac{\cot g^2 z}{2} Q' - \frac{\cot g z}{2\sqrt{2\beta}} \frac{x}{1-x}$$

Aehnlich wie $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$ durch Integration nach einer der Grenzen gefunden wurde, so findet sich auch

$$\left(\frac{dQ'}{d\beta}\right) = \frac{\cot g^2 z}{2} Q'' - \frac{\cot g z}{2\beta} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \frac{x}{(1-x)^3}$$

Digitized by Google

und

$$\left(\frac{d^2 Q}{d\beta^2}\right) = \frac{\cot g^2 z}{2}\left(\frac{d Q'}{d\beta}\right) + \frac{\cot g z}{2(2\beta)^{\frac{1}{2}}}\frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{\cot g^4 z}{4} Q'' - \sqrt{\frac{\beta}{2}}\frac{\cot g^3 z}{4\beta}\frac{x}{(1-x)^3} + \sqrt{\frac{\beta}{2}}\frac{\cot g z}{4\beta^2}\frac{x}{(1-x)} \cdots\cdots (k)$$

Aus (g) ist

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1-x}{x} Q'$$

mithin

$$\left(\frac{d^2 Q}{dx \cdot d\beta}\right) = \frac{1-x}{x}\frac{\cot g^2 z}{2} Q'' - \sqrt{\frac{\beta}{2}}\frac{\cot g z}{2\beta}\frac{1}{(1-x)^2} \cdots\cdots (l)$$

Aus

$$\beta = \frac{g-l}{gl} a,\ l = l_0(1 + m\tau),\ \alpha = \alpha_0 \frac{b}{B}\frac{1}{1+m\tau}^{1}),\ x = \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}$$

folgt:

$$\left(\frac{d\beta}{dl}\right) = -\frac{a}{l^2},\ \left(\frac{dl}{d\tau}\right) = lm,\ \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = -\alpha m,$$

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right) = \frac{x}{\beta},\ \left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha},\ \left(\frac{d^2\beta}{dl^2}\right) = \frac{2a}{l^3},\ \left(\frac{d^2 l}{d\tau^2}\right) = 0$$

also:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) = \left(\frac{d\beta}{dl}\right)\left(\frac{dl}{d\tau}\right) = -\frac{am}{l} = -m\beta\frac{g}{g-l}\\
&\left(\frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right) = m^2 2\beta\frac{g}{g-l},\ \left(\frac{dx}{d\tau}\right) = \left(\frac{dx}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{d\tau}\right) + \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) = -mx\left(\frac{2g-l}{g-l}\right)\\
&\left(\frac{d^2 x}{d\tau^2}\right) = 2m^2 x\left(\frac{3g-l}{g-l}\right)
\end{aligned}\right\} (m)$$

Nach den Formeln (f), (g), (i), (l), (m) erhält man

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right) = -mQ'\left\{\frac{2g-l}{g-l}(1-x) + \frac{g}{g-l}\frac{\beta}{2}\cot g^2 z\right\} + m\sqrt{\frac{\beta}{2}}\frac{\cot g z}{2}\frac{g}{g-l}\frac{x}{1-x} \cdots (n)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 Q}{d\tau^2}\right) &= m^2 Q''\left\{\frac{2g-l}{g-l}(1-x) + \frac{g}{g-l}\frac{\beta}{2}\cot g^2 z\right\}^2\\
&+ m^2 Q'\left\{\frac{6g-2l}{g-l}(1-x) - \left(\frac{2g-l}{g-l}\right)^2 + \frac{\beta}{2}\cot g^2 z\frac{2g}{g-l}\right\}\\
&- m^2\frac{x}{1-x}\sqrt{\frac{\beta}{2}}\cot g z\cdot\frac{g}{g-l}\left\{\frac{g}{g-l}\cdot\frac{\beta}{4}\cdot\frac{\cot g^2 z}{(1-x)^2} + \frac{2g-l}{g-l}\frac{1}{1-x}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{3g-4l}{4g-4l}\right\}
\end{aligned}\right\} (o)$$

und

$$\left(\frac{dQ}{db}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) = \frac{1-x}{x} Q'\left(\frac{dx}{db}\right) = \frac{1-x}{x} Q'\frac{x}{\alpha}\left(\frac{d\alpha}{db}\right) = \frac{1-x}{b} Q' \cdots\cdots (p)$$

---

[1]) Den Factor $1 + n\tau'$ kann man sich mit in b enthalten denken.

Digitized by Google

wo man sich erlauben kann b mit B zu vertauschen. Diese Werthe in (e) eingesetzt geben, wenn man

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\,\sin^2 z\, Q' &= (1-\alpha)\,\delta'\vartheta\\ \sqrt{\frac{2}{\beta}}\,\sin^2 z\, Q'' &= (1-\alpha)\,\delta''\vartheta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

setzt:

$$\text{B.}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}\,\{(1-\alpha)\,\delta\vartheta\}}{\mathrm{d}\,b}\right) = (1-\alpha)\,\delta'\vartheta\,\frac{1-x}{b}\\ &\left(\frac{\mathrm{d}\,\{(1-\alpha)\,\delta\vartheta\}}{\mathrm{d}\,\tau}\right) = -\,m\,(1-\alpha)\,\delta'\vartheta\left\{\frac{2g-1}{g-1}(1-x)+\frac{g}{g-1}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotg}^2 z\right\}\\ &\qquad + m\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta\,\frac{\frac{1}{2}g}{g-1} + \frac{m\,\alpha\,\beta\,\mathrm{cotg}\,z}{1-x}\,\frac{\frac{1}{2}g}{g-1}\\ &\left(\frac{\mathrm{d}^2\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{1.2\,\mathrm{d}\,\tau^2}\right) = \tfrac{1}{2}\,m^2\,(1-\alpha)\,\delta''\vartheta\left\{\frac{2g-1}{g-1}(1-x)+\frac{g}{g-1}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotg}^2 z\right\}^2\\ &+\tfrac{1}{2}\,m^2\,(1-\alpha)\,\delta'\vartheta\left\{\left(4+\frac{1\,(g-2\,1)}{(g-1)^2}\right)(1-x)-\left(\frac{2g-1}{g-1}\right)^2+\frac{g\,(g-2\,1)}{(g-1)^2}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotg}^2 z\right\}\\ &-\tfrac{1}{2}\,m^2\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta\left\{\frac{g\,(g-4\,1)}{4\,(g-1)^2}\right\}-\tfrac{1}{2}\,m^2\,\frac{\alpha\beta\,\mathrm{cotg}\,z}{1-x}\left\{\frac{g^2}{(g-1)^2}\,\frac{\beta}{4}\,\frac{\mathrm{cotg}^2 z}{(1-x)^2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{g\,(2\,g-1)}{(g-1)^2}\,\frac{1}{(1-x)} + \frac{g\,(g-4\,1)}{4\,(g-1)^2}\right\}\end{aligned}\right.$$

Hat man nach diesen Formeln

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{\mathrm{d}\,b}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{\mathrm{d}\,\tau}\right),\ \left(\frac{\mathrm{d}^2\,(1-\alpha)\,\delta\vartheta}{1.2\,\mathrm{d}\,\tau^2}\right)$$

berechnet, so findet sich nach den schon aufgeführten Formeln (c) λ und A.

Das noch in (b) vorkommende und hier nicht ganz entwickelte Glied

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\vartheta}{1.2\,\mathrm{d}\,\tau^2} - \frac{\lambda.(\lambda+1)}{1.2}\,m^2\,\delta\vartheta\right\}\tau^2$$

ist immer sehr klein und kann, wenn die Refraction nicht ganz in unmittelbarer Nähe des Horizontes gebraucht wird, vernachlässigt werden.

Ohne dieses Glied schreibt sich die Formel (b) logarithmisch

$$\lg\delta r = \lg\delta\vartheta + \lambda\lg\left(\frac{1}{1+m\tau}\right) + A\left(\lg\frac{b}{B} + \lg\frac{1}{1+\tau' n}\right)$$

Bessel setzt nun

$$\text{(r)}\quad \ldots\ldots \delta\vartheta = \alpha\,\mathrm{tg}\,z,\ \frac{1}{1+m\tau} = \gamma,\ \frac{b}{B} = B,\ \frac{1}{1+\tau' n} = T$$

und hat

$$\text{(C)}\quad \ldots\ldots \lg\delta r = \lg\alpha + \lg\mathrm{tg}\,z + \lambda\lg\gamma + A\,(\lg B + \lg T)$$

und giebt Tafeln für lg α mit dem Argumente z

für lg γ mit dem Argumente τ

für lg B mit dem Argumente b

für lg T mit dem Argumente τ'

Diese Tafeln werde ich in einem besondern Werke später zusammenstellen und durch Beispiele erläutern.

Digitized by Google

§ 8.

Theorie von Thomas Young.

Wir haben § 5 gesehen, dass nach der Laplace'schen Hypothese über die Dichtigkeit der Luft die Barometerhöhe bei weitem nicht dargestellt wird. Besser stellt die Hypothese von Professor Leslie den Barometerstand dar; diese Hypothese giebt zwischen der Dichtigkeit ϱ und dem Drucke p folgende Relation:

$$\varrho = \frac{p\,\varrho_0}{p_0}\left(1 + n\,\left\{\frac{\varrho_0}{\varrho} - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right\}\right).$$

oder, wenn wir die Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde $\varrho_0 = 1$ und den Druck $p_0 = 1$ setzen,

$$\varrho = p\left\{1 + n\,\left(\frac{1}{\varrho} - \varrho\right)\right\}$$

wo n nach Leslie $< 0{,}1$ (0,09) ist.

Young geht von der geometrischen Betrachtung aus, seine Gleichungen sind identisch mit denen, die Lambert gefunden hat. Ist (s. Fig. 18) der Betrag der Refraction $= \delta\vartheta =$ W. ILA, $0B = r$, $IB = v$, $I0 = u$, so haben wir nach den frühern Gleichungen:

$$d\,(\delta\vartheta) = \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} = \frac{du}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Young setzt $u = \frac{s}{1 + q\,\varrho}$, wo ϱ, die Dichtigkeit, von 0 bis 1 wächst, q eine sehr kleine Zahl, eine Constante, und s ebenfalls eine Constante ist.

Bei dem Anfangswerth von u, wo $\varrho = 0$, ist auch $\delta\vartheta = 0$ bei dem Endwerth von u, wo $\varrho = 1$, ist $\delta\vartheta = \delta\vartheta$; wir haben daher nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$\text{(u Anfangswerth)} - \text{(u Endwerth)} = \frac{du}{d(\delta\vartheta)}\,\delta\vartheta + \frac{d^2u}{d(\delta\vartheta)^2}\,\frac{\delta\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3u}{d(\delta\vartheta)^3}\,\frac{\delta\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots \quad (2)$$

und annähernd ist

$$\text{(u Endwerth)} = \frac{s}{1+q} = s - sq$$

$$\text{(u Anfangswerth)} = \frac{s}{1} = s$$

und aus (1)

$$\frac{du}{d(\delta\vartheta)} = v$$

wird daher

$$qs = v.\delta\vartheta + \frac{dv}{d(\delta\vartheta)}\,\frac{\delta\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^2v}{d(\delta\vartheta)^2}\,\frac{\delta\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{d^3v}{d(\delta\vartheta)^3}\,\frac{d\vartheta^4}{1.2.3.4} + \ldots \quad (3)$$

Aus $v^2 = r^2 - u^2$ folgt

$$dv = \frac{r\,dr - u\,du}{v}$$

Digitized by Google

und

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dv}{d(\delta\vartheta)} = \frac{r}{v}\,\frac{dr}{d(\delta\vartheta)} - u$$

Erhebt man sich um die Höhe d r auf der Erdoberfläche, so nimmt der Luftdruck um d p ab, und wir haben die Gleichung

$$dr = -\frac{dp}{m\varrho}$$

wo ϱ die Dichtigkeit, m aber eine Constante bezeichnet.

Aus $u = \frac{s}{1+q\varrho}$ folgt genähert

$$du = -q\,s\,d\varrho = v\,d(\delta\vartheta), \text{ — aus (1) —}$$

mithin

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dr}{d(\delta\vartheta)} = \frac{v}{m\,q\,s\,\varrho}\,\frac{dp}{d\varrho}$$

und aus (4) wird:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dv}{d(\delta\vartheta)} = \frac{r}{m\,q\,s\,\varrho}\,\frac{dp}{d\varrho} - u$$

Aus der Leslie'schen Hypothese

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = p\left\{1 + n\left(\frac{1}{\varrho} - \varrho\right)\right\}$$

folgt

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{p}{\varrho} + \frac{np^2}{\varrho^3} + \frac{np^2}{\varrho}$$

mithin

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dv}{d(\delta\vartheta)} = \frac{rp}{m\,q\,s\,\varrho^2} + \frac{nrp^2}{m\,q\,s\,\varrho^2} + \frac{nrp^2}{m\,q\,s\,\varrho^4} - u$$

Bedenkt man nun, dass die Endwerthe von ϱ und p an der Oberfläche der Erde 1, dass ebenfalls r = 1, v in cos z, s in sin z übergeht, so hat man statt (3)

$$(9) \ldots q \sin z = \delta\vartheta \cos z + \left(\frac{1+2n}{2\,m\,q \sin z} - \frac{\sin z}{2}\right) d\vartheta^2 + \frac{d^2v}{d(\delta\vartheta)^2}\,\frac{\delta\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und hierin kann man $\frac{d^2v}{d(\delta\vartheta)^2}$ ebenso entwickeln, wie es mit $\frac{dv}{d(\delta\vartheta)}$ geschehen ist, und, wenn man will, noch mehr Glieder.

Young hat im Ganzen 4 Glieder, er findet noch

$$\frac{d^2v}{d(\delta\vartheta)^2} = \frac{1-2n-12nn}{m\,q^2 \sin^2 z} \cos z$$

$$\frac{d^3v}{d(\delta\vartheta)^3} = \frac{1-16n^2-24n^3}{m^2 q^3 \sin^3 z} - \frac{1-2n-12n^2}{m\,q^2 s} - \frac{2-6n-20n^2+112n^3}{m\,q^3 \sin^3 z} \cos^2 z$$

und indem er für n den Leslie'schen Werth 0,09 setzt, wird die Horizontalrefraction um etwa 1′ zu gross; er verändert daher die Constanten so, dass sie der Horizontalrefraction entsprechen und als Endresultat [1]) giebt er

$$\text{I.} \quad \ldots \quad \begin{cases} 0{,}0002825 = \delta\vartheta\,\dfrac{\cos z}{\sin z} + (2.5 + 0{,}5\cos^2 z)\,\dfrac{d\vartheta^2}{\sin^2 z} \\ \qquad + 3400\cos z\,\dfrac{d\vartheta^3}{\sin^3 z} + 3400\,(1{,}25 + 0{,}25\cos^2 z)\,\dfrac{\delta\vartheta^4}{\sin^4 z} \end{cases}$$

[1]) Gültig für 30 Engl. Zoll Barometerstand und 50° Fahrenheit.

Digitized by Google

In den Philosoph. Transactions for 1824 giebt er noch einen andern endlichen Ausdruck für die Refraction in geringen Höhen. Aus Beobachtungen hat er eine andre Gleichung zwischen dem Luftdruck und der Dichtigkeit gefunden, und zwar setzt er

$$p = \tfrac{1}{2}\varrho^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Erhebt man sich in der Atmosphäre um die Höhe dh, so ist wie wir schon oben hatten

$$dh = -\frac{dp}{m\varrho}$$

aus (10) ist

$$dp = \frac{9}{4}\varrho^{\frac{1}{2}}\,d\varrho - \varrho\,d\varrho$$

folglich

$$dh = -\frac{9}{4}\,\frac{d\varrho}{m\sqrt{\varrho}} + \frac{d\varrho}{m}$$

und wenn man integrirt:

$$\int dh = -\frac{9}{2m}\sqrt{\varrho} + \frac{\varrho}{m} + \text{Const.}$$

Für $h = 0$ ist $\varrho = 1$, daraus

$$\text{die Constante} = \frac{7}{2m} \text{ und}$$

$$\int dh = -\frac{9}{2m}\sqrt{\varrho} + \frac{\varrho}{m} + \frac{7}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

An der Grenze der Atmosphäre ist $\varrho = 0$, daher

$$h = \frac{7}{2m}$$

und da $\frac{1}{m}$ aus den Beobachtungen $\frac{1}{772{,}8}$ des Erdradius ist, wird

$$h = 3{,}71 \text{ Meilen (95550 engl. Fuss).}$$

Unsre in § 2 und 3 gegebene Differentialgleichung für die Refraction ist:

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\alpha\,\frac{d\varrho}{\varrho_0}(1-s)\sin z}{(1-\alpha)\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)-(1-s)^2\sin^2 z}}$$

Setzt man $1 - s = \frac{1}{r}$, $\varrho_0 = 1$, $\frac{\alpha}{1-\alpha} = q$ und $2\alpha r^2 = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$, hat man:

$$d(\delta\vartheta) = \frac{-q\,d\varrho\sin z}{\sqrt{r^2 - 2q(1-\varrho) - \sin^2 z}}$$

$1 + h$ für r, für r^2 nur $1 + 2h$ gesetzt, wird diese Gleichung

$$d(\delta\vartheta) = \frac{-q\,d\varrho\sin z}{\sqrt{2\int dh + \cos^2 z - 2q(1-\varrho)}}$$

$$= \frac{-q\,d\varrho\sin z}{\sqrt{\left(\frac{7}{m} - \frac{9}{m}\varrho^{\frac{1}{2}} + \frac{2\varrho}{m} + \cos^2 z - 2q + 2q\varrho\right)}}$$

Digitized by Google

Setzt man $\sqrt{\varrho} = \Psi$, wodurch $d\varrho = 2\Psi\, d\Psi$ wird, so hat man

$$-\frac{d(\delta\theta)}{2\sin z.q} = \frac{\Psi\, d\Psi}{\sqrt{\frac{7}{m} - 2q + \cos^2 z - \frac{9}{m}\Psi + \left(\frac{2}{m} + 2q\right)\Psi^2}}$$

$$= \frac{\Psi\, d\Psi}{\sqrt{(a + b\Psi + c\Psi^2)}}$$

wenn man

$$a = \frac{7}{m} - 2q + \cos^2 z$$

$$b = -\frac{9}{m}$$

$$c = \frac{2}{m} + 2q$$

setzt.

Nach der Integralrechnung findet sich aber, da c positiv ist, der Werth des Ausdrucks rechts nach der Integration

$$= \frac{1}{c}\left[\sqrt{(a + b\Psi + c\Psi^2)} - \frac{b}{2\sqrt{c}} \lg\left\{2c\Psi + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + b\Psi + c\Psi^2}\right\}\right]$$

und für Ψ die Grenzen 1 und 0 eingesetzt die aus $\varrho = 1$ und $\varrho = 0$ folgen, hat man schliesslich:

$$-\frac{c\,\delta\theta}{2q\sin z} = \sqrt{\frac{7}{m} - 2q + \cos^2 z} - \cos z - \frac{9}{2m\sqrt{\frac{2}{m} + 2q}} \times$$

$$\lg\left(\frac{\frac{4}{m} + 4q - \frac{9}{m} + 2\cos z\sqrt{\frac{2}{m} + 2q}}{-\frac{9}{m} + 2\sqrt{\frac{2}{m} + 2q}\sqrt{\frac{7}{m} - 2q + \cos^2 z}}\right)$$

Für $q = 0{,}0002835$, $\frac{1}{m} = \frac{1}{772{,}8} = 0{,}001294$, $\frac{7}{m} - 2q = 0{,}008491$ $-\frac{9}{m} = -0{,}011646$, $\frac{2}{m} + 2q = 0{,}003155$ etc. eingesetzt, hat man:

$$-\delta\theta = \sin z.0{,}17972\left[\sqrt{(0{,}008491 + \cos^2 z)} - \cos z\right.$$

$$\left. - 0{,}10367 \lg \frac{0{,}005336 - 0{,}11284\cos z}{0{,}011646 - 0{,}11234\sqrt{0{,}008491 + \cos^2 z}}\right]$$

Für die Horizontalrefraction findet sich

$$\delta\theta = 0{,}009840 = 33' 42'',5,$$

welches bis auf 1″,5 mit den Laplace'schen Tafeln übereinstimmt. Für $\cos z = 0{,}1$ oder $z = 5^0\ 44'\ 21''$ findet sich $\delta\theta = 8'\ 48'',7$ (Young hat 8′ 49″,5), Ivory's Tafeln vom Jahre 1823 gaben 8′ 49″,6.

Young hält nicht für nöthig nach der gegebenen Formel Tafeln zu rechnen, nach Formel I finden sich welche im Nautical Almanac für 1822 etc.

Digitized by Google

§ 9.

Theorie von Schmidt.

Durch die Vergleichung in verschiedenen Höhen hat sich heraus gestellt, dass die Temperatur ziemlich gleichförmig abnimmt; erhebt man sich um die Höhe h und fällt das Thermometer um τ Grade, so fällt es bis 2h um 2τ Grade.

In unsern gemässigten Gegenden muss man sich, damit das Thermometer um 1° Grad Celsius falle, 170 — 180 Meter erheben, Humboldt fand in den Aequatorgegenden 190 Meter; auch ist diese Grösse im Sommer und Winter nicht immer dieselbe, im Winter ist sie gewöhnlich grösser, was sich auch leicht durch die kältere, oft wechselnde Temperatur erklären lässt.

Ist m, wie bisher, der Ausdehnungscoefficient der Luft, τ und τ^0 die Grade des Thermometers in der Höhe h und an der Oberfläche der Erde, so lassen sich obige Bedingungen nach Schmidt durch die Formel

$$\frac{1 + m\tau}{1 + m\tau^0} = 1 - \frac{h}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo b eine gleich näher zu bestimmende Constante ist, darstellen.

Macht man $h = b$, so ist

$$1 + m\tau = 0$$

Nach einem der frühern § haben wir, wenn p und ϱ den Luftdruck und die Dichtigkeit in der Höhe h, p_0, ϱ_0 dieselben Grössen an der Oberfläche der Erde bezeichnen

$$p = p_0 \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da p nur an der Oberfläche der Luft $= 0$ sein kann, so folgt daraus, dass $1 + m\tau$ auch nicht eher $= 0$ sein darf, und b ist daher gleich der Höhe der Atmosphäre.

Differentiirt man h nach τ, so erhält man:

$$\frac{dh}{d\tau} = - \frac{mb}{1 + m\tau^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

So lange τ^0 denselben Werth behält, bleibt $\frac{dh}{d\tau}$ constant, d. h. die Wärme nimmt bei gleicher Erhebung um gleich viel ab; ist τ^0 kleiner, wie es z. B. im Winter gegen den Sommer der Fall ist, so ist $\frac{dh}{d\tau}$ grösser, d. h. man muss sich, um einen Grad Temperaturabnahme zu haben, höher erheben, und dies entspricht auch der Wirklichkeit.

Nach § 3 ist:

$$dp = - g_0 \frac{a^2}{r^2} \varrho \, dr$$

Digitized by Google

und durch Gleichung (2) getheilt, kommt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{p_0}\varrho_0\frac{a^2}{r^2}\,dr\,\frac{1+m\tau_0}{1+m\tau}$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{l}\frac{a^2}{(a+h)^2}\,dh\,\frac{1}{1+m\tau}$$

wenn man wieder

$$(5)\ldots\ldots\ldots l = \frac{p_0}{g_0\varrho_0(1+m\tau_0)},\ r = a+h$$

setzt.

In $\left(1+\frac{h}{a}\right)^2$ kann man wegen der Kleinheit von h das Glied 2ter Ordnung vernachlässigen und man hat

$$\left(1+\frac{h}{a}\right)^2 = 1+\frac{2h}{a}$$

und Gleichung (1) lässt sich schreiben

$$\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = \left(1-\frac{h}{b}\right)\left(1+\frac{2h}{a}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^2}$$

mithin

$$\frac{1}{1+m\tau} = \frac{1}{1+m\tau_0}\left(1+\frac{h}{a}\right)^2\frac{1}{1-\frac{h}{b}}\,\frac{1}{1+\frac{2h}{a}}$$

und wenn man dies in (4) substituirt, erhält man

$$(6)\ldots\ldots\ldots \frac{dp}{p} = -\frac{1}{l}\,\frac{a.b}{1+m\tau^0}\,\frac{dh}{(b-h)(a+2h)}$$

welche Gleichung integrirt giebt:

$$\lg p = \text{Const.} - \frac{1}{l}\,\frac{a.b.}{1+m\tau_0}\,\frac{1}{a+2b}\lg\frac{a+2h}{b-h}$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $h = 0$, $p = p_0$, mithin

$$\lg p_0 = \text{Const.} - \frac{1}{l}\,\frac{a.b}{1+m\tau}\,\frac{1}{a+2b}\lg\frac{a}{b}$$

also:

$$(7)\ldots\ldots\ldots \lg\frac{p}{p_0} = \frac{1}{l}\,\frac{a.b}{1+m\tau_0}\,\frac{1}{a+2b}\lg\frac{a(b-h)}{b(a+2h)}$$

Da nun auch

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0}$$

oder

$$\lg\frac{\varrho}{\varrho_0} = \lg\frac{p}{p_0} - \lg\left(1-\frac{h}{b}\right)$$ ist,

so wird aus Gleichung (7)

$$(8)\ldots\ldots\ldots \lg\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{l}\,\frac{a.b}{1+m\tau_0}\,\frac{1}{a+2b}\lg\left(\frac{a(b-h)}{b(a+2h)}\right) - \lg\left(\frac{b-h}{b}\right)$$

Da die Werthe a, l, m bekannt sind (Schmidt nimmt dieselben Werthe, die wir in § 5 bei der Laplace'schen Theorie gegeben), so lässt sich b bestim-

Digitized by Google

men, sobald man eine der vielfach gemachten Beobachtungen über die Dichtigkeit der Luft in einer bestimmten Höhe h zu Grunde legt. Das Mittel, b aus dem Dämmerungsbogen zu bestimmen, ist zu unsicher, denn während Alhazen den Bogen zu 17° annahm, setzt man ihn jetzt allgemein 18°, Cassini wollte nur 15°, und wenn man 16 und 17° annehmen will, kann man es auch thun, weil uns Beweise für eine grössere oder geringere Annahme fehlen. Die auf Bergen angestellten Beobachtungen hält Schmidt der Local-Einflüsse wegen für etwas unsicher und die einzigst brauchbare Bestimmung scheint ihm die von Gay-Lussac gemachte Beobachtung bei seiner Luftfahrt [1]) zu sein. In einer Höhe von 6980 Meter [2]) beobachtete Gay-Lussac, wie schon früher angeführt, die Temperatur — 9°,5 C., das Barometer 0,3288 Meter, auf der Erde waren diese Grössen 30°,8 und 0,76568 Meter.

Daraus findet sich

$$\lg \frac{p}{p_0} = \lg \frac{0{,}3288\left(1 + \frac{40{,}3}{5412^{3})}\right)}{0{,}76568}$$

$$= 9.63611$$

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \lg \frac{p}{p_0} + \lg \frac{1 + 0{,}00375 \times 30°{,}8}{1 + 0{,}00375 \times -9{,}5} = 9{,}69933$$

und durch einige Versuche aus Gleichung (8)

$$b = 49100 \text{ Meter } [4]).$$

Aus Gleichung (1) findet sich damit

$$h = \frac{184{,}125\,(\tau_0 - \tau)}{1 + 0{,}00375\,\tau_0}$$

und wofür $\tau_0 - \tau = 1°$ ist

wenn	$\tau_0 = +30°$	h = 165,5 Meter
	$\tau_0 = +20$	= 171,3 „
	$\tau_0 = +10$	= 177,5 „
	$\tau = 0$	= 184,1 „
	$\tau_0 = -10$	= 191,3 „
	$\tau_0 = -20$	= 199,1 „
	$\tau_0 = -30$	= 207,5 „

Ist also die Temperatur an der Erdoberfläche + 30° Celsius, so muss man sich 165,5 M. erheben, damit sie um 1 Grad abnehme, bei 20° Temperatur an der Erdoberflächem um 171,3 Meter u. s. w.

---

[1]) Lhoest & Robertson, Barral & Bixio, Welsh haben 1803, 1850, 1852 auch Luftfahrten unternommen, doch verschiedene Resultate erhalten, siehe Arago's sämmtl. Werke, Band IX, pag. 425.

[2]) Nach Arago Band IX, pag. 425 wird die Höhe zu 7016 Meter angenommen.

[3]) $\frac{1}{5412}$ ist der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers, der jetzt $\frac{1}{5550}$ angenommen wird.

[4]) Durch die neuern Bestimmungen von l, a, m würde $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ etwas verändert und auch b, doch sehr unbeträchtlich. Aus den Dämmerungsbogen von 18°, 15°, 13° würde b folgen 67800, 48200, 31900 Meter.

Digitized by Google

Schmidt berechnet noch zu verschiedenen Höhen nach der Formel (8) die Grösse $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ und vergleicht sie mit den beobachteten, er findet fast überall eine genügende Uebereinstimmung, nur die von Humboldt gemachte Beobachtung auf dem Chimborasso würde ein b von 57500 Meter erfordern. Weil aber zu wenige Beobachtungen aus der heissen Zone vorliegen, lässt sich nicht mit Sicherheit der Schluss ziehen, dass dort vielleicht eine andere Temperaturabnahme als in der gemässigten Zone existire.

Wenden wir uns jetzt, nachdem die Hypothese über die Wärmeabnahme erörtert und durch die Beobachtungen bestätigt ist, zur Refraction selbst.

In § 2 haben wir die Gleichung:

$$d(\delta\vartheta) = -\frac{\frac{2N}{c^2} d\varrho \sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0} \frac{a}{r} \sin z}{\left(1 + \frac{4N}{c^2}\varrho\right)\sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho - \left(1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0\right)\frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

Setzt man wie früher

$$\alpha = \frac{\frac{2N}{c^2}\varrho_0}{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0}$$

und

$$1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = 1 - \alpha,$$

so hat man

$$(9) \quad d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\frac{a}{r}\frac{d\varrho}{\varrho_0}\sin z}{\sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) - \frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

Setzt man

$$(10) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\varrho}{\varrho^0} = w, \text{ so wird} \\ \frac{d\varrho}{\varrho_0} = dw \\ \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = 1 - \beta \\ \left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 - \beta(1-x) \end{array}\right.$$

und aus (9) wird

$$d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta(1-x)}\sin z\, dw}{\sqrt{1 - \{1-\beta(1-x)\}\sin^2 z - 2\alpha(1-w)}}$$

und nenne ich

$$(11) \quad \frac{\beta\sin^2 z}{\cos^2 z + \beta\sin^2 z} = k, \quad \frac{2\alpha}{\cos^2 z + \beta\sin^2 z} = L$$

so wird:

$$(12) \quad d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\sqrt{\beta}} \sqrt{k} \frac{\sqrt{1-\beta(1-x)}\, dw}{\sqrt{1 - kx - L(1-w)}}$$

Digitized by Google

β ist eine Constante, die von der Höhe der Atmosphäre l abhängt; bei b = 49100 Meter ist

$$\beta = 0{,}01524855,$$

x ist die von r abhängige Variable, deren Grenzen 1 und 0 sind, k und L sind Grössen die von der Zenithdistanz abhängen, ihre Grenzen sind 0 und 1, und 2α und $\frac{2\alpha}{\beta}$; α ist die bekannte Grösse

$$0{,}000293876,$$

$\frac{2\alpha}{\beta}$ ist also etwa 0,038 und obwohl dieser Werth sich durch die Temperatur etwas ändert, ist diese Aenderung doch nicht so gross, dass sie hinderte den Nenner in (12) nach Potenzen von L zu entwickeln, und dadurch eine sehr convergente Reihe zu erhalten. Es findet sich:

$$d(\delta\vartheta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\,(1-a)}\sqrt{k}\sqrt{1-\beta(1-x)}\;dw \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1-kx}} + \frac{1}{2} L \frac{1-w}{1-kx} \frac{1}{\sqrt{1-kx}} \\ + \frac{3}{8} L^2 \left(\frac{1-w}{1-kx}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-kx}} \\ + \frac{5}{16} L^3 \left(\frac{1-w}{1-kx}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1-kx}} \\ + \frac{35}{128} L^4 \left(\frac{1-w}{1-kx}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{1-kx}} + \text{etc.} \end{array} \right\} \ldots (12)$$

Um diese Gleichung zu integriren, ist es nöthig von den 2 Veränderlichen die eine durch die Gleichung, die wir zwischen dieser und der andern kennen, fortzuschaffen, wir wollen w in x ausdrücken und haben aus (10) die Gleichungen

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 - \beta(1-x)$$

also

$$\frac{a}{r} = 1 - \frac{1}{2}\beta(1-x) - \frac{1}{8}\beta^2(1-x)^2 - \frac{1}{16}\beta^3(1-x)^3 - \ldots$$

und für β seinen Werth

$$1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{2ab+b^2}{(a+b)^2}$$

für r = a + h gesetzt, kommt

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+h} = 1 &- \frac{1}{2}\frac{2ab+b^2}{(a+b)^2} - \frac{1}{8}\frac{(2ab+b^2)^2}{(a+b)^4} - \frac{1}{16}\frac{(2ab+b^2)^3}{(a+b)^6} - \ldots \\ &+ x\left\{\frac{1}{2}\frac{2ab+b^2}{(a+b)^2} + \frac{1}{4}\frac{(2ab+b^2)^2}{(a+b)^4} + \frac{3}{16}\frac{(2ab+b^2)^3}{(a+b)^6} + \ldots\right\} \\ &- x^2\left\{\frac{1}{8}\frac{(2ab+b^2)^2}{(a+b)^4} + \frac{3}{16}\frac{(2ab+b^2)^3}{(a+b)^6} + \ldots\right\} \\ &+ x^3\left\{\frac{1}{16}\frac{(2ab+b^2)^3}{(a+b)^6} + \ldots\right\} \end{aligned}$$

Digitized by Google

woraus

$$\frac{\frac{a(a+b)}{a+h}-a}{b}=\frac{a}{b}\,\frac{b-h}{a+h}=1-\frac{1}{2}\,\frac{2a+b}{a+b}-\frac{1}{8}\,\frac{(2ab+b^2)^2}{b(a+b)^3}-\frac{1}{16}\,\frac{(2ab+b^2)^3}{b(a+b)^5}-\ldots$$

$$+x\left\{\frac{1}{2}\,\frac{2a+b}{a+b}+\frac{1}{4}\,\frac{(2ab+b^2)^2}{b(a+b)^3}+\frac{3}{16}\,\frac{(2ab+b^2)^3}{b(a+b)^5}+\ldots.\right\}$$

$$-x^2\left\{\frac{1}{8}\,\frac{(2ab+b^2)^2}{b(a+b)^3}+\frac{3}{16}\,\frac{(2ab+b^2)^3}{b(a+b)^5}+\ldots\right\}$$

$$+x^3\left\{\frac{1}{16}\,\frac{(2ab+b^2)^3}{b(a+b)^5}+\ldots.\right\}+\ldots. \text{ ist.}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\frac{b}{a}$ und nimmt nur Glieder bis $\frac{b^2}{a^2}$ mit, welches immer hinreichend ist, so hat man

$$\frac{1}{2}\,\frac{2a+b}{a+b}=1-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}-\ldots.$$

$$\frac{1}{8}\,\frac{(2ab+b^2)^2}{b(a+b)^3}=\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}+\ldots.$$

$$\frac{1}{16}\,\frac{(2ab+b^2)^3}{b(a+b)^5}=\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}-\ldots. \text{ etc.}$$

So erhält man einfach:

$$(\alpha)\ldots.\ \frac{a}{b}\,\frac{b-h}{a+h}=x+\frac{b}{2a}(1-x)x-\frac{b^2}{2a^2}(1-x)x^2+\ldots.$$

Aus

$$\frac{a}{a+h}=1-\frac{1}{2}\beta(1-x)-\frac{1}{8}\beta^2(1-x)^2-\frac{1}{16}\beta^3(1-x)^3-\ldots.$$

folgt

$$\frac{h}{a+h}=\frac{1}{2}\beta(1-x)+\frac{1}{8}\beta^2(1-x)^2+\frac{1}{16}\beta^3(1-x)^3+\ldots.$$

Es ist aber

$$\beta=\frac{2ab+b^2}{(a+b)^2}=2\,\frac{b}{a}-3\,\frac{b^2}{a^2}+\ldots.$$

mithin, wenn man nur die Glieder bis $\frac{b^2}{a^2}$ mitnimmt:

$$(\beta)\ldots.\ \frac{h}{a+h}=\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}-\frac{b}{a}x+\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}x+\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}x^2+\ldots.$$

und

$$1+\frac{h}{a+h}=\frac{a+2h}{a+h}=1+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}\left(x-\frac{b}{a}x\right)-\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}(x-x^2)+\ldots$$

oder

$$(\gamma)\ldots.\ \frac{a+2h}{a+h}=1+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)(1-x)-\frac{b^2}{2a^2}(1-x)x$$

Bezeichnet man in (8)

$$(13)\ldots.\ \frac{1}{1}\,\frac{a\,.\,b}{1+m\tau_0}\,\frac{1}{a+2b}=v$$

Digitized by Google

so hat man

$$w = \left(\frac{a}{b}\,\frac{(b-h)}{a+2h}\right)^{\nu}\left(\frac{b}{b-h}\right)$$

oder

$$w = \left(\frac{a}{b}\,\frac{b-h}{a+h}\right)^{\nu}\left(\frac{a+h}{a+2h}\right)^{\nu}\left(\frac{b}{b-h}\right) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Es ist nahe

$$\frac{b}{b-h} = \frac{b}{b-h}\left(\frac{a+h}{a}\right)^{2}\left(\frac{a}{a+2h}\right)$$
$$= \frac{b\,(a+h)}{a\,(b-h)}\,\frac{a+h}{a+2h}$$

also

$$w = \left(\frac{a\,(b-h)}{b\,(a+h)}\right)^{\nu-1}\left(\frac{a+h}{a+2h}\right)^{\nu+1} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Erhebt man die Reihen in (α) und (γ) zur $(\nu-1)$ten und $-(\nu+1)$ten Potenz und setzt sie in (15) ein, nimmt nur die ersten Glieder mit, indem die höherer Ordnung so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können, so erhält man

$$w = \left\{x^{\nu-1} + (\nu-1)\,\frac{b}{2a}\,(1-x)\,x^{\nu-1} + \ldots\right\}\left\{1 - (\nu+1)\,\frac{b}{a}\,(1-x) + \ldots\right\} \ldots. \quad (16)$$
$$= x^{\nu-1} - \frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}\,(1-x)\,x^{\nu-1} - \ldots..$$

Differentiirt man, so wird:

$$\frac{dw}{\nu-1} = x^{\nu-2}\left(1 - \frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}\right)dx + \frac{\nu}{\nu-1}\,\frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}\,x^{\nu-1}\,dx + \ldots.$$

und

$$\frac{dw}{\nu-1}\sqrt{1-\beta\,(1-x)} = \frac{dw}{\nu-1}\sqrt{1-\beta}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\beta}{1-\beta}\,x - \frac{1}{8}\,\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\,x^2 + \ldots\right\}dx$$
$$= x^{\nu-2}\sqrt{1-\beta}\left(1 - \frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}\right)dx +$$
$$x^{\nu-1}\left(\frac{\nu}{\nu-1}\,\frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\nu+3}{4}\,\frac{\beta\,\frac{b}{a}}{1-\beta}\right)\sqrt{1-\beta}\,dx$$
$$- x^{\nu}\sqrt{1-\beta}\,\frac{\beta^2}{8\,(1-\beta)^2}\,dx + \ldots.$$

Es ist vollkommen genügend bei allen Gliedern in Gleichung (12), die mit L multiplicirt sind, nur die erste Potenz von $\frac{b}{a}$ und von β zu nehmen und man kann setzen

$$\beta = 2\,\frac{b}{a}$$

$$\sqrt{1-\beta} = 1 - \frac{b}{a}$$

dann wird:

$$\sqrt{1-\beta\,(1-x)}\,\frac{dw}{\nu-1} = x^{\nu-2}\left(1 - \frac{\nu+5}{2}\,\frac{b}{a}\right)dx + x^{\nu-1}\,\frac{b}{a}\,\frac{\nu^2+5\nu-2}{2\,(\nu-1)}\,dx + \ldots.$$

Digitized by Google

und setzt man der Kürze wegen

$$(17)\ldots\begin{cases}\sqrt{1-\beta}\,\left(1-\frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}\right)=A\\ \left(\frac{b}{a}\,\frac{\nu}{\nu-1}\,\frac{\nu+3}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\nu+3}{4}\,\frac{\beta\cdot\frac{b}{a}}{1-\beta}\right)\sqrt{1-\beta}=B\\ \frac{1}{8}\,\frac{\beta^2}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}=C,\quad 1-\frac{\nu+5}{2}\,\frac{b}{a}=D\\ \frac{b}{a}\,\frac{\nu^2+5\nu-2}{2(\nu-1)}=E,\ D\,\frac{\nu+3}{2}\,\frac{b}{a}=F,\ \frac{\alpha}{1-\alpha\sqrt{\beta}}=\frac{M}{\nu-1}\end{cases}$$

so hat man

$$\frac{dw}{\nu-1}\sqrt{1-\beta(1-x)}=(Ax^{\nu-2}+Bx^{\nu-1}+Cx^{\nu}+\ldots)\,dx$$

und für die in (12) mit L zu multiplicirenden Glieder

$$\frac{dw}{\nu-1}\sqrt{1-\beta(1-x)}=(Dx^{\nu-2}+Ex^{\nu-1}+\ldots)\,dx$$

ferner:

$$(1-w)^n\frac{dw}{\nu-1}\sqrt{1-\beta(1-x)}=D\left(1-x^{\nu-1}\right)^n x^{\nu-2}\,dx+E\left(1-x^{\nu-1}\right)^n x^{\nu-1}\,dx$$
$$+Fn\left(1-x^{\nu-1}\right)^{n-1}(1-x)\,x^{2\nu-3}\,dx+\ldots.$$

Diese sämmtlichen Werthe in (12) substituirt, giebt:

$$\frac{d(\delta\vartheta)}{M\sqrt{k}}=A\,\frac{x^{\nu-2}\,dx}{\sqrt{1-kx}}+B\,\frac{x^{\nu-1}dx}{\sqrt{1-kx}}+C\,\frac{x^{\nu}\,dx}{\sqrt{1-kx}}+\ldots.$$
$$+\frac{1}{2}L\left\{D\left(1-x^{\nu-1}\right)\frac{x^{\nu-2}\,dx}{(1-kx)^{\frac{3}{2}}}+E\left(1-x^{\nu-1}\right)\frac{x^{\nu-1}\,dx}{(1-kx)^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left.+F(1-x)\,\frac{x^{2\nu-3}\,dx}{(1-kx)^{\frac{3}{2}}}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{3}{8}L^2\left\{D\left(1-x^{\nu-1}\right)^2\frac{x^{\nu-2}\,dx}{(1-kx)^{\frac{5}{2}}}+E\left(1-x^{\nu-1}\right)^2\frac{x^{\nu-1}\,dx}{(1-kx)^{\frac{5}{2}}}\right.$$
$$\left.+2F\left(1-x^{\nu-1}\right)(1-x)\,\frac{x^{2\nu-3}\,dx}{(1-kx)^{\frac{5}{2}}}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{5}{16}L^3\left\{D\left(1-x^{\nu-1}\right)^3\,\frac{x^{\nu-2}\,dx}{(1-kx)^{\frac{7}{2}}}+E\left(1-x^{\nu-1}\right)^3\frac{x^{\nu-1}\,dx}{(1-kx)^{\frac{7}{2}}}\right.$$
$$\left.+3F\left(1-x^{\nu-1}\right)^2(1-x)\,\frac{x^{2\nu-3}\,dx}{(1-kx)^{\frac{7}{2}}}+\ldots.\right\}$$
$$+\frac{35}{128}L^4\left\{D\left(1-x^{\nu-1}\right)^4\frac{x^{\nu-2}\,dx}{(1-kx)^{\frac{9}{2}}}+E\left(1-x^{\nu-1}\right)^4\frac{x^{\nu-1}\,dx}{(1-kx)^{\frac{9}{2}}}\right.$$
$$\left.+4F\left(1-x^{\nu-1}\right)^3(1-x)\,\frac{x^{2\nu-3}}{(1-kx)^{\frac{9}{2}}}+\ldots.\right\}$$
$$+\ldots\ldots.$$

Digitized by Google

§ 10.

Fortsetzung.

Die Gleichung (18) soll zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ integrirt werden, der Werth von k wächst von 0 bis 1, weil $k = \frac{\beta \sin^2 z}{\cos^2 z + \beta \sin^2 z}$, 0 ist er im Zenith, 1 im Horizonte. Im Zenith ist die Refraction gleich 0, wir haben daher das Integral für k von 0 bis 1 zu lösen.

Die allgemeine Form der Integrale ist

$$Q = \int (1 - x^{\nu-1})^p (1-x)^q \frac{x^n}{(1-kx)^{p+q+\frac{1}{2}}} dx \quad \ldots\ldots (1)$$

die für die Horizontalrefraction wird:

$$Q_0 = \int (1 - x^{\nu-1})^p \frac{x^n}{(1-x)^{p+\frac{1}{2}}} dx = \int \left(\frac{1-x^{\nu-1}}{1-x}\right)^p \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx \ldots (2)$$

p und q sind ganze positive Zahlen, q in unserem Falle 0 oder 1, v und n können dagegen auch irrational sein; sobald aber die eine rational, ist es auch die andere und wir brauchen nur diesen letzten Fall zu erörtern, weil es ganz in unserer Hand liegt v zu einer ganzen Zahl zu machen. Es ist nämlich

$$\nu = \frac{1}{l} \frac{a \cdot b}{1 + m\tau_0} \frac{1}{a + 2b}$$

und da l, a, b bestimmte Constanten sind, m auch bekannt ist, so können wir τ_0 so nehmen, dass v eine ganze Zahl wird. Unsre Refraction gilt dann allerdings nicht für 0° Temperatur, aber was schadet das, wir haben bereits bei den Theorien von Laplace, Bessel etc. die Art und Weise kennen gelernt, die Refraction von einer Temperatur auf die andere zu reduciren.

Sobald v eine ganze Zahl ist, entwickeln wir

$$\frac{1-x^{\nu-1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{\nu-2}$$

und

$$\left(\frac{1-x^{\nu-1}}{1-x}\right)^p = (1 + x + x^2 + \ldots\ldots x^{\nu-2})^p = 1 + px + \frac{p \cdot p + 1}{1.2} x^2 + \ldots\ldots$$

welches noch mit $\frac{\sqrt{1-x}}{x^n} dx$ multiplicirt eine Anzahl Integrale von der Form

$$\int_1^0 \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx$$

giebt.

Nach der theilweisen Integration ist:

$$\int \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx = -\int 2x^\lambda \frac{d.(1-x)^{\frac{1}{2}}}{dx} dx = -2x^\lambda \sqrt{1-x} + 2\lambda \int x^{\lambda-1} \sqrt{1-x}\, dx$$

Digitized by Google

und $$\int_1^0 \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = 2\lambda \int_1^0 x^{\lambda-1}\sqrt{1-x}\,dx$$ [1])

Nach fortgesetzter theilweiser Integration ist:

$$\int_1^0 \frac{x^\lambda}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\lambda \cdot 2(\lambda-1)}{3}\int_1^0 x^{\lambda-2}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

und setzt man dies λ mal fort, so hat man

$$(3)\ldots\ldots \int_1^0 \frac{x^\lambda\,dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\lambda\cdot(2\lambda-2)(2\lambda-4)\ldots.2}{3\cdot5\cdot7\ldots2\lambda-1}\int_1^0 (1-x)^{\frac{2\lambda-1}{2}}\,dx$$
$$= 2\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2\lambda-4)(2\lambda-2)2\lambda}{3\cdot5\cdot7\ldots(2\lambda-1)(2\lambda+1)}$$

Als Beispiel sei der Werth von folgenden Integralen angeführt:

$$\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2, \int_1^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}} = 1{,}33333\ldots$$
$$\int_1^0 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x}} = 1{,}0666666\ldots, \int_1^0 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x}} = 0{,}914286\ldots. \text{ etc. etc.}$$

Damit ist also Q_0 bestimmt und man braucht nur zu substituiren, so haben wir die Horizontalrefraction.

Um Q zu ermitteln sei

$$(1-x^{\nu-1})^p (1-x)^q x^n = P$$

und nach der theilweisen Integration haben wir dann

$$Q = \frac{1}{k(p+q-\frac{1}{2})}\,\frac{P}{(1-kx)^{p+q-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{k(p+q-\frac{1}{2})}\int \frac{\frac{dP}{dx}}{(1-kx)^{p+q-\frac{1}{2}}}\,dx$$

und weiter fortgesetzt und die Grenzen 0 und 1 eingesetzt, erhält man schliesslich

$$(4)\ldots\ldots Q = \pm\frac{1}{k^i(p+q-\frac{1}{2})(p+q-\frac{3}{2})\ldots(p+q-\frac{2i-1}{2})}\int \frac{d^iP}{dx^i}\,\frac{dx}{(1-kx)^{p+q-i+\frac{1}{2}}}$$

das + oder — Zeichen, je nachdem i grade oder ungrade ist, wobei aber zu bemerken ist, dass der vom Integral freie Theil nur dann verschwindet, wenn in P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, etc. die Exponenten n, n—1, n—2 etc. positiv und q, q—1, q—2 etc. und p, p — 1, p — 2 etc. nicht zugleich 0 sind.

Die allgemeine Form von P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$ etc. ist

$$x^\alpha (1-x^{\nu-1})^\beta (1-x)^\gamma$$

und entwickeln wir dies nach Potenzen von x, so erhalten wir

$$x^m + ax^n + bx^o + \ldots.$$

und der Ausdruck in (18) des § 9 ist durch (4) etc. zurückgeführt auf Integrale von der Form

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-kx}}$$

[1]) Dies ist das Euler'sche Integral erster Gattung (a, b), es ist nur vertauscht a mit λ, b mit $\frac{3}{2}$.

Digitized by Google

Setzt man $k = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}$ und entwickelt nach Potenzen von x:

$$(1-\frac{4\mu}{(1+\mu)^2}x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2\mu}{(1+\mu)^2}x + \frac{6\mu^2}{(1+\mu)^4}x^2 + \frac{20\mu^3}{(1+\mu)^6}x^3 + \ldots.$$
$$+ \frac{1.3.5.(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\frac{(4\mu)^i}{(1+\mu)^{2i}}x^i + \ldots.$$

multiplicirt diese Reihenentwicklung mit $x^n\,dx$, integrirt zwischen den Grenzen 1 und 0, so erhält man, wenn man nach Potenzen von μ ordnet:

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-kx}} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}\mu + \frac{2n}{(n+2)(n+3)}\mu^2 + \frac{2n(n-1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\mu^3$$
$$+ \frac{2n.(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\mu^4 + \ldots\ldots \quad (6)$$

eine Reihe, die für n als ganze positive Zahl oder $n = 0$ immer abbricht und convergent ist.

Entwickeln wir sämmtliche Glieder in (18) § 9 in die unter (5) gegebene Form, so werden wir finden, dass sämmtliche Glieder sich nach (6) auflösen lassen, sobald $v \geqq 5$ ist, denn dann werden alle n positiv oder 0 sein. Die niedrigste Potenz von n kommt vor in der Entwicklung

$$\left.\begin{aligned}\int(1-x^{v-1})^4\frac{x^{v-2}\,dx}{(1-kx)^{\frac{9}{2}}} = {} & \frac{16}{105}\frac{(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)}{k^4}\int\frac{x^{v-6}\,dx}{\sqrt{1-kx}} \\ & - \frac{64}{105}\frac{(2v-3)(2v-4)(2v-5)(2v-6)}{k^4}\int\frac{x^{2v-7}\,dx}{\sqrt{1-kx}} \\ & + \frac{32}{35}\frac{(3v-4)(3v-5)(3v-6)(3v-7)}{k^4}\int\frac{x^{3v-8}\,dx}{\sqrt{1-kx}} \\ & - \frac{64}{105}\frac{(4v-5)(4v-6)(4v-7)(4v-8)}{k^4}\int\frac{x^{4v-9}\,dx}{\sqrt{1-kx}} \\ & + \frac{16}{105}\frac{(5v-6)(5v-7)(5v-8)(5v-9)}{k^4}\int\frac{x^{5v-10}\,dx}{\sqrt{1-kx}}\end{aligned}\right\} \ldots. (7)$$

im ersten Gliede rechts, wo $n = -1$ bei $v = 5$ zu sein scheint; doch es scheint nur so, denn es ist

$$(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)\int\frac{x^{v-6}\,dx}{\sqrt{1-kx}} = (v-2)(v-3)(v-4)(1-kx)^{-\frac{1}{2}}x^{v-5}$$
$$-\frac{(v-2)(v-3)(v-4)k}{2}\int\frac{x^{v-5}}{(1-kx)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

welches für $v = 5$ übergeht in

$$3.2.(1-kx)^{-\frac{1}{2}} - 3k\int\frac{1}{(1-kx)^{\frac{3}{2}}}\,dx = 6(1-kx)^{-\frac{1}{2}} - 6(1-kx)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

auch für die Grenzen 1 und 0 für x.

Es ist nach unsern Entwicklungen

$$v = \frac{1}{l}\,\frac{a.b}{1+m\tau_0}\,\frac{1}{a+2b}$$

und mit den bekannten Werthen für 0,76 M. Barometer, $l = 7974$ Meter, $a = 6366198$, $b = 49100$ ist bei $\tau_0 = 0$

$$v_0 = 6{,}063976$$

Digitized by Google

Aus $v\,(1 + 0{,}00375\,t) = v_0$, folgt für $v = 5$

$$t = +\,56^0{,}7$$

also eine solche Temperatur, bis zu der wohl fast nie Beobachtungen am Himmel gemacht werden.

Es ist eine einfache algebraische Operation den Ausdruck (18) § 9 nach den Vorschriften in (7), (6) etc. zu entwickeln und zu integriren. Ich führe hier die Rechnungen nicht aus, sondern gebe nur das schliessliche Resultat mit den numerischen Werthen an; doch bevor dies geschehen kann, ist es noch nöthig den Einfluss der Veränderung der Temperatur und des Barometerstandes zu berücksichtigen und dies kann man auf eine sehr leichte Art, indem man nämlich

$$\begin{matrix} v = 5 \\ v = 6 \\ v = 7 \end{matrix}$$

setzt. Unser Endausdruck für die Refraction hat nach (18) die Form:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \delta\vartheta = M\,\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}L + \mathfrak{C}L^2 + \mathfrak{D}L^3 + \mathfrak{E}L^4 +)$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ abhängig von v und mit v nur Functionen von der Temperatur τ sind. Dagegen L, M sind abhängig von α und veränderlich mit der Temperatur τ und dem Barometerstand b.

Schmidt bezeichnet die Refraction für $v = 6$, wo t nahe dem Eispuncte ($t = +\,2^0{,}83$), mit der mittlern Refraction und setzt sie $\delta\vartheta^0$ und für

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \begin{cases} v = 5, \; \delta\vartheta = \delta\vartheta^0 - \triangle\vartheta + \triangle^2\vartheta \\ v = 6, \; \delta\vartheta = \delta\vartheta^0 \\ v = 7, \; \delta\vartheta = \delta\vartheta^0 + \triangle\vartheta + \triangle^2\vartheta \end{cases}$$

Für $v = 6 + \xi$ ist alsdann nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn man mit dem 2ten Gliede abbricht,

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta\vartheta = \delta\vartheta^0 + \xi\triangle\vartheta + \xi^2\triangle^2\vartheta$$

L und M sind, wie eben gesagt, von α abhängig und aus § 6 wissen wir, dass α proportional dem Barometerstande ist; um also nicht allein eine Correction für die Temperatur, welche in v ausgedrückt wird, sondern auch die für den Luftdruck anzubringen, können wir, wenn der Barometerstand von 0,76 Meter übergeht in 0,76 Meter $\times\,(1 + \triangle p)$, M übergehen lassen in $M(1 + \triangle p)$, L in $L\,(1 + \triangle p)$ und aus (8) wird

$$(11) \ldots \delta r = M\,(1+\triangle p)\,\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}L(1+\triangle p)+\mathfrak{C}L^2(1+\triangle p)^2+\mathfrak{D}L^3(1+\triangle p)^3+\ldots)$$

$$= \delta\vartheta\,(1+\triangle p) + M\,\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}\,(1+\triangle p)\triangle p\,\{\mathfrak{B}L+2\mathfrak{C}L^2+3\mathfrak{D}L^3+\ldots\}$$

$$= (1 + \triangle p)\,(\delta\vartheta + \Lambda\triangle p)$$

wenn wir

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad M\,\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}\,(\mathfrak{B}L + 2\mathfrak{C}L^2 + 3\mathfrak{D}L^2 + \ldots) = \Lambda$$

setzen.

Digitized by Google

Nennen wir für
$$\left.\begin{array}{ll} v = 5 & \Lambda = \Lambda^0 - \triangle\Lambda \\ v = 6 & \Lambda = \Lambda^0 \\ v = 7 & \Lambda = \Lambda^0 + \triangle\Lambda \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so haben wir für $v = 6 + \xi$

$$\Lambda = \Lambda^0 + \triangle\Lambda\,\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Schmidt hat mit $v = 5, 6, 7$ die numerischen Werthe berechnet und daraus nach (9) und (13) $\delta\vartheta^0$, $\triangle\vartheta$, $\triangle^2\vartheta$, Λ^0, $\triangle\Lambda$ abgeleitet, er findet mit

$$\frac{2N}{c^2}\,\varrho_0 = 0{,}000294047,\ \beta = 0{,}01524855,\ \frac{b}{a} = 0{,}007712609$$

für	$v = 5$	$v = 6$	$v = 7$
A	0,9617332	0,9579052	0,9540787
B	0,0457138	0,0487457	0,0520326
C	0,0000297	0,0000297	0,0000297
D	0,9614370	0,9575806	0,9537244
E	0,0462756	0,0493607	0,0527028
F	0,0296608	0,0332345	0,0367785
α	0,0002423365	0,000290945	0,0003392055
M	1619″,55	2429″,21	3400″,73

und setzt man

$$k = \sin^2\zeta = \frac{\beta\sin^2 z}{\cos^2 z + \beta\sin^2 z}$$

wodurch wird

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg} z\sqrt{\beta}$$
$$\mu = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\zeta$$

so hat man für 0,76 Meter und 2°,83 Celsius

$$\delta\vartheta^0 = \sin\zeta\begin{cases} 485'',206 + 828'',040\,\mu + 512'',906\,\mu^2 + 229'',938\,\mu^3 \\ + 76'',601\,\mu^4 + 21'',809\,\mu^5 + 6'',760\,\mu^6 + 2'',354\,\mu^7 + 0'',791\,\mu^8 \\ + 0'',255\,\mu^9 + 0'',082\,\mu^{10} + 0'',020\,\mu^{11} + 0'',006\,\mu^{12} + 0'',001\,\mu^{13} \end{cases} \quad (A)$$

Für die Horizontalrefraction ist $\mu = 1$, $\zeta = 1$ und es wird $\delta\vartheta^0 = 36'\,4'',8$, Bessel hat für denselben Barometerstand, für dieselbe Temperatur $38'\,12''$, Ivory $35'\,45'',5$.

Es findet sich ferner:

$$\Lambda^0 = \sin\zeta\begin{cases} 0'',071 + 18'',551\,\mu + 49'',925\,\mu^2 + 58'',952\,\mu^3 + 43'',691\,\mu^4 \\ + 24'',058\,\mu^5 + 11'',045\,\mu^6 + 4'',948\,\mu^7 + 1'',968\,\mu^8 + 0'',730\,\mu^9 \\ + 0'',258\,\mu^{10} + 0'',071\,\mu^{11} + 0'',022\,\mu^{12} + 0'',004\,\mu^{13} \end{cases} \quad (B)$$

$$\triangle\vartheta = \sin\zeta\begin{cases} 80'',296 + 167'',936\,\mu + 162'',366\,\mu^2 + 120'',860\,\mu^3 \\ + 66'',045\,\mu^4 + 28'',342\,\mu^5 + 11'',573\,\mu^6 + 5'',034\,\mu^7 + 2'',178\,\mu^8 + 0'',927\,\mu^9 \\ + 0'',384\,\mu^{10} + 0'',150\,\mu^{11} + 0'',057\,\mu^{12} + 0'',023\,\mu^{13} + 0'',007\,\mu^{14} \end{cases} \quad (C)$$

$$\triangle^2\vartheta = \sin\zeta\begin{cases} 0'',017 + 0'',557\,\mu + 5'',081\,\mu^2 + 13'',497\,\mu^3 + 15'',241\,\mu^4 \\ + 10'',990\,\mu^5 + 5'',906\,\mu^6 + 2'',818\,\mu^7 + 1'',306\,\mu^8 + 0'',560\,\mu^9 \\ + 0'',229\,\mu^{10} + 0'',095\,\mu^{11} + 0'',035\,\mu^{12} + 0'',016\,\mu^{13} + 0'',005\,\mu^{14} \end{cases} \quad (D)$$

$$\triangle\Lambda = \sin\zeta\begin{cases} 0'',024 + 6'',204\,\mu + 21'',477\,\mu^2 + 34'',820\,\mu^3 + 36'',935\,\mu^4 \\ + 28'',129\,\mu^5 + 17'',511\,\mu^6 + 9'',800\,\mu^7 + 5'',084\,\mu^8 + 2'',518\,\mu^9 \\ + 1'',165\,\mu^{10} + 0'',494\,\mu^{11} + 0'',200\,\mu^{12} + 0'',087\,\mu^{13} + 0'',027\,\mu^{14} \end{cases} \quad (E)$$

Digitized by Google

Durch Einführung zweier Hülfsgrössen $\triangle \vartheta^0$ und $\triangle \Lambda^0$ indem man

$$\triangle \vartheta = 0{,}1667868\, \delta\vartheta^0 + \triangle \vartheta^0$$
$$\triangle \Lambda = \tfrac{1}{3}\, \Lambda^0 + \triangle \Lambda^0 \qquad \text{setzt,}$$

wird die schliessliche Form sein

$$\delta r = (1 + \triangle p) \left\{ \delta\vartheta^0 (1 + 0{,}1667868\, \xi) + \triangle \vartheta^0\, \xi + \triangle^2 \vartheta\, \xi^2 + [\Lambda^0 (1 + \tfrac{1}{3}\xi) + \triangle \Lambda^0\, \xi] \triangle p \right\}$$

wofür 3 verschiedene Tafeln hinreichen.

§ 11.

Theorie von Ivory.

Es ist schon erwähnt, dass, bereits vor Schmidt, Ivory im Jahre 1823 eine Refractionstheorie publicirte und diese 1838 noch verallgemeinerte, indem er die Function der Temperaturabnahme noch um beliebig viele Glieder vermehrte. Wegen der Unsicherheit der Horizontalrefraction setzte er aber schliesslich die Coefficienten dieser Glieder = 0, denn ihr ganzer Einfluss auf die Horizontalrefraction beträgt wenige Secunden. Die Cassini'sche, die Simpson'sche, die Newton'sche, die Bessel'sche, die Schmidt'sche Theorie sind von seiner Theorie gewissermassen besondere Fälle.

Behalten wir die frühern Bezeichnungen für den Luftdruck und die Dichtigkeit p und ϱ bei, so war nach § 9

$$\frac{p\, \varrho_0}{p_0 \varrho} = \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0}$$

Ivory setzt

$$(1) \quad \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} = 1 - \frac{s}{\mu + 1}$$

wo s eine von der Höhe in der Atmosphäre abhängige Constante und zwar

$$(2) \quad s = \frac{h}{l (1 + m\tau_0)}$$

wo h die Höhe über der Erde, l die bekannte Constante ist.

Setzt man $\tau_0 = 0$, so ist nach Schmidt's Theorie

$$b = (\mu + 1)\, l$$

mithin für b = 49100, l = 7974 Meter

$$\mu = \frac{49100}{7974} - 1 = 5{,}03$$

Aus

$$dp = - dh\, \varrho$$

und

$$p_0 = l (1 + m\tau_0)\, \varrho_0$$

folgt

$$\frac{dp}{p_0} = - \frac{dh}{l (1 + m\tau_0)} \frac{\varrho}{\varrho_0} = - ds \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

Digitized by Google

woraus, wenn man integrirt, da nach (1)

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} - \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{s}{\mu + 1} \text{ ist,}$$

folgt

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} - \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{s}{\mu + 1} = \int - ds \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

und nach s differentiirt, kommt

$$-\frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{ds}{\mu + 1} + \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right) \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho}{ds} ds = - ds \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

daher

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{ds}{1 - \frac{s}{\mu + 1}} \left(1 - \frac{1}{\mu + 1}\right) = - \mu \frac{\frac{ds}{\mu + 1}}{1 - \frac{s}{\mu + 1}}$$

welches integrirt und die Constante richtig bestimmt, giebt:

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \mu \lg \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu}$$

mithin

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu + 1}$$

Cassini's Theorie wird genügt, sobald $\mu = 0$, Simpson's, sobald $\mu = 1$, Newton's, sobald $\mu = \infty$, weil $\left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu + 1}$ für $\mu + 1 = \infty$ in e^{-s} übergeht, gesetzt wird.

Nimmt man für s einen andern Werth an, so bekommt man leicht das Resultat der Bessel'schen Hypothese; setzt man nämlich

$$s = \frac{g - l}{l} \frac{a s_,}{l} = \beta s_,$$

und nehmen wir $\mu = \infty$, so finden wir den Bessel'schen Ausdruck in § 7, aber wir werden später sehen, dass Bessel's Hypothese in Hinsicht der Temperaturabnahme beträchtlich von den Beobachtungen abweicht.

Ivory ändert auch s, er behält bei

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu},$$

er setzt aber

$$\frac{p}{p_0} = (1 - f) \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu + 1} + f \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{2\mu}$$

wodurch

$$\frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} = \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right) \left\{1 - f + f \left(1 - \frac{s}{\mu + 1}\right)^{\mu - 1}\right\} \text{ wird.}$$

Lassen wir μ in ∞ übergehen und setzen $\frac{\mu s}{\mu + 1} = u$, so haben wir

Digitized by Google

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-u}$$

$$\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = 1 - f\left(1 - e^{-u}\right)$$

$$\frac{p}{p_0} = (1-f)\,e^{-u} + f\,e^{-2u}$$

Aus der Leslie'schen Hypothese ist $f = \frac{1}{4}$ und mit diesem Werthe führt Ivory in den Philosophical Transactions von 1823 die Rechnung durch und giebt Tafeln dazu. 1838 verallgemeinert er noch die Hypothese für $\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0}$, indem er setzt

$$\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = 1 - f\left(1 - e^{-u}\right) - \varphi(u)$$

wo $\varphi(u)$ eine solche Function ist, dass sie mit $u = 0$ auch 0 wird.

Er setzt

$$\varphi(u) = f'(R_2 + R_3) - f''(R_3 + 2R_4 + R_5) + \ldots$$

wo

$$R_2 = 1 - u - e^{-u} = -\frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} - \ldots$$

$$R_3 = 1 - u + \frac{u^2}{1.2} - e^{-u} = \frac{u^3}{1.2.3} - \ldots$$

etc., f', f'' etc. aber Constanten sind; und führt die Entwicklung mit f' bis zum Schlusse durch; das mit

$$f = \frac{2}{9}$$

(welcher Werth nach den Versuchen von Dalton und Ramond folgt) erhaltene Resultat für die Horizontalrefraction stimmt aber so nahe mit dem beobachteten Werthe überein, dass f' nahe 0 wird, der numerische Coefficient ist nur 60″ und daraus erhellt, dass die Horizontalrefraction schwerlich das Mittel sein wird, f' zu bestimmen. Um die Entwicklungen nicht zu weit auszudehnen, lasse ich f' ganz fort und setze nur

(1) $$\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = 1 - f(1 - e^{-u})$$

$$= 1 - fu + f\frac{u^2}{1.2} - f\frac{u^3}{1.2.3} + f\frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$= 1 - q$$

wenn $q = fu - f\frac{u^2}{1.2} + f\frac{u^3}{1.2.3} - f\frac{u^4}{1.2.3.4} + \ldots$ gesetzt wird.

Ferner ist:

(2) $$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-u}$$

daher

(3) $$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\,\frac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = (1-q)\,e^{-u} = e^{-u} - fe^{-u}\left(u - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} - \ldots\right)$$

Digitized by Google

Es sei h die Höhe in der Atmosphäre und a der Erdhalbmesser, ausserdem

$$\sigma = \frac{h}{1 + \frac{h}{a}}$$

so ist, da nach § 2

$$p = \int \frac{-\,d\,h \,.\, \varrho}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2}$$

wenn man $g = 1$ setzt, auch mit Berücksichtigung von (2)

$$p = \varrho_0 \int - d\sigma\, e^{-u}$$

oder mit (3)

$$\int - d\sigma \,.\, e^{-u} = \frac{p}{\varrho_0}\,\frac{p_0}{p_0} = \frac{p_0}{\varrho_0}\left\{e^{-u} - f\,e^{-u}\,(1 - e^{-u})\right\}$$

und

$$d\sigma = \frac{p_0}{\varrho_0}\left\{du - f\,du + 2f\,e^{-u}\,du\right\}$$

und integrirt, wobei die Constante, da mit σ auch $u = 0$ wird, $2\,\frac{p_0}{\varrho_0}\,f$ ist.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{p_0}{\varrho_0}\left\{u + f\,(2 - u - 2e^{-u})\right\}\\ &= \frac{p_0}{\varrho_0}\left\{u - f\,u + 2q\right\}\\ &= \frac{p_0}{\varrho_0}\left\{\frac{1+f}{f}\,q + \frac{1-f}{2}\,\frac{q^2}{f^2} + \frac{1-f}{3}\,\frac{q^3}{f^3} + \frac{1-f}{4}\,\frac{q^4}{f^4} + \ldots\right\} \quad \ldots (4)\end{aligned}$$

wenn man die obige Reihe für q umkehrt, wodurch wird

$$u = \frac{q}{f} + \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{f^2} + \tfrac{1}{3}\,\frac{q^3}{f^3} + \ldots$$

Einfacher noch wird die Gleichung (4), wenn man Logarithmen einführt. Aus (3) ist

$$\begin{aligned}\lg \frac{p_0}{p} &= u + \lg \frac{1}{1-q} = u + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} + \ldots\\ &= \frac{1+f}{f}\,q + \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{f^2}\,(1 + f^2) + \tfrac{1}{3}\,\frac{q^3}{f^3}\,(1 + f^3) + \ldots\end{aligned}$$

und dies in (4) getheilt giebt

$$\sigma = \left\{\lg \frac{p_0}{p}\right\}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\,\left(1 - \tfrac{1}{2}\,q - \frac{1 + f^2}{12\,f\,(1+f)}\,q^2 - \ldots\right) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

worin $q = \frac{m\,(\tau^0 - \tau)}{1 + m\,\tau_0}$ auch gesetzt werden darf.

Nach dieser Formel kann man sehr leicht nach Ivory's Theorie, sobald der Luftdruck und die Wärme in einer Höhe gegeben ist, diese berechnen. Ivory benutzt die Formel um damit f zu finden.

Will man noch Rücksicht auf die Feuchtigkeit nehmen, so hat man nach den neuesten Versuchen, wenn φ_0 die Spannung der Wasserdämpfe bezeichnet

$$(\varrho_0) = \varrho\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{\varphi_0}{p_0}\right)$$

Digitized by Google

der grösste Werth von φ_0 ist 0,36 Zoll, also die Veränderung von ϱ_0 höchstens $1 - \frac{3}{8}\frac{0{,}36}{30} = 1 - \frac{1}{222}$, eine Grösse welche immer sehr klein ist; aus σ wird damit statt (4)

$$(6) \quad \ldots\ldots \sigma = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}\frac{\varphi_0}{p_0}} \cdot \frac{p_0}{\varrho_0} \left\{ u + f\left(2 - u - 2e^{-u}\right) \right\}$$

Gehen wir jetzt zur Refraction über, so haben wir nach § 2

$$d(\delta\theta) = \frac{-\alpha \frac{d\varrho}{\varrho_0} \frac{a}{r} \sin z}{\left\{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right\} \sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) - \frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

oder setzt man $\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - w$, $\frac{d\varrho}{\varrho_0} = -dw$

$$\sigma = \frac{h}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{ah}{r}, \frac{\sigma}{a} = \frac{h}{r}, 1 - \frac{\sigma}{a} = 1 - \frac{h}{r} = \frac{r - h}{r} = \frac{a}{r}$$

so kommt

$$d(\delta\theta) = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha w} \sin z \frac{dw}{\sqrt{\frac{1 - 2\alpha w}{\left(1 - \frac{\sigma}{a}\right)^2} - \sin^2 z}}$$

Für $\frac{1}{1 - 2\alpha w}$ setze ich den Mittelwerth $\frac{1}{1 - \alpha}$ oder $1 + \alpha$ und $\frac{\sigma}{a} = ix + \alpha w$, dann wird

$$\frac{1 - 2\alpha w}{\left(1 - \frac{\sigma}{a}\right)^2} = 1 + 2xi + 3x^2 i^2 \ldots,$$

also

$$(7) \quad \ldots\ldots d(\delta\theta) = \alpha(1 + \alpha) \sin z \frac{du \cdot e^{-u}}{\sqrt{\cos^2 z + 2xi + 3x^2 i^2}}$$

Hierin sind aber noch mehr als eine Variable und zuerst ist es nöthig sie auf Eine zurückzuführen. Nach (4) ist

$$\sigma = aix + a\alpha w = \frac{p_0}{\varrho_0} \left\{ u + f\left(2 - u - 2e^{-u}\right) \right\}$$

und setze ich

$$\frac{p_0}{\varrho_0 a} = \frac{l(1 + m\tau_0)}{a} = i$$

kömmt

$$ix + \alpha - \alpha e^{-u} = i \left\{ u + f\left(2 - u - 2e^{-u}\right) \right\}$$

woraus

$$(8) \quad \ldots\ldots x = u - \frac{\alpha}{i}\left(1 - e^{-u}\right) + f\left(2 - u - 2e^{-u}\right)$$
$$= u - \Psi(u)$$

folgt.

Digitized by Google

Nach dem schönen Lagrange'schen Theorem ist:

$$\left.\begin{aligned} e^{-u} &= e^{-x} - e^{-x}\,\psi(x) - \tfrac{1}{2}\,\frac{d\,.\,e^{-x}\,\psi^2(x)}{dx} - \ldots . \\ \text{folglich} \\ du\,e^{-u} &= dx\,e^{-x} + \frac{d\,.\,e^{-x}\,.\,\psi(x)}{dx}\,dx + \tfrac{1}{2}\,\frac{d^2\,.\,e^{-x}\,.\,\psi^2(x)}{dx^2}\,dx^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Es findet sich ferner

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\alpha}{i}\,(1 - e^{-x}) - f\,(2 - x - 2\,e^{-x}) \\ e^{-x}\,\psi(x) &= \frac{\alpha}{i}\,(e^{-x} - e^{-2x}) - f\,(2\,e^{-x} - x\,e^{-x} - 2\,e^{-2x}) \\ \frac{d\,.\,e^{-x}\,\psi(x)}{dx}\,dx &= \frac{\alpha}{i}\,(2\,e^{-2x} - e^{-x}) - f\,(4\,e^{-2x} - 3\,e^{-x} + x\,e^{-x}) \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

und ebenso lässt sich das 2te Differential von $e^{-x}\,\psi\,(x)$ finden. Führten wir dies aus und berechneten nachher seinen Werth für die äussersten Grenzen von $x = 0$ bis $x = \infty$, so würde sich zeigen, ebenso wie in § 3, dass der grösste Werth dieses Ausdrucks für die Horizontalrefraction wenig über 1″ beträgt. Auch wenn wir den Nenner in (7)

$$(\cos^2 z + 2ix + 3i^2x^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ in } (\cos^2 z + 2ix)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\,\frac{i^2x^2}{(\cos^2 z + 2ix)^{\frac{5}{2}}}$$

entwickeln und das Integral (7) dadurch in 2 Theile theilen, wird dieser 2te Theil ebenfalls zu vernachlässigen sein.

Wir haben daher einfach statt (7), wenn wir aus (9) und (10) die Werthe einsetzen und integriren

$$\delta\vartheta = \alpha\,(1 + \alpha)\,\sin z \left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx\,e^{-x}}{\sqrt{\cos^2 z + 2ix}} + \frac{\alpha}{i}\int \frac{dx\,(2\,e^{-2x} - e^{-x})}{\sqrt{\cos^2 z + 2ix}} \\ &- f\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 z + 2ix}}\,(4\,e^{-2x} - 3\,e^{-x} - x\,e^{-x}) \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

Die Grenzen von x werden aus den frühern Gleichungen sich leicht herleiten lassen, sie sind 0 und die Höhe der Atmosphäre getheilt durch i oder l, also wenn wir die Höhe zu 10 l annehmen, etwa 10. Wir könnten aber gerne dafür 0 und ∞ nehmen, denn von 10 bis ∞ ist, wie wir sehen werden, der Werth der einzelnen Integrale ziemlich $= 0$.

Um die Integrale aufzulösen, ist es ein leichtes sie auf die uns schon bekannte Form

$$\int e^{-tt}\,dt$$

zurückzuführen; man braucht nur

$$\cos^2 z + 2ix = a\,t^2$$

zu setzen und für die Grenzen 0 und 10. Hätte man 2 endliche Grenzen A und B, so brauchte man nur von A bis ∞ und von B bis ∞ zu integriren und die Werthe von einander abzuziehen, so wäre das Resultat gefunden.

Digitized by Google

Ivory hat aber eine sehr elegante Auflösung gegeben und von dieser gebe ich hier noch einen kurzen Abriss.

Betrachten wir aber erst den Fall der Horizontalrefraction, so werden die Integrale, da cos z = 0 ist, einfacher; nehmen wir noch die Grenzen 0 und ∞, so haben wir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{2ix}} = \frac{2}{\sqrt{2i}} \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2i}},$$

wenn wir $y = \sqrt{x}$ setzen.

Ebenso folgt

$$\int_0^\infty \frac{(2e^{-2x} - e^{-x})}{\sqrt{2ix}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2i}}\sqrt{2} - 1 \text{ etc.}$$

und mit den Werthen von Ivory:

$$\alpha = 58'',47$$

für 30 Englische Zoll und 10° C. (im Mittel aus Brinkley, Delambre, Bessel, Arago und Biot)

$$i = 0{,}0012958$$

$$\frac{\alpha}{i} = 0{,}21878, \quad f = \frac{2}{9}$$

findet sich die Horizontalrefraction 2072",46, während sie 2070" sein soll.

Zur Auflösung der Integrale zurückkehrend, setzen wir die oberste Grenze = m (10) und ferner

(11) . . . $\cos z = \cot g\,\varphi\sqrt{2im}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = c$, wodurch $\cos^2 z = \frac{(1-c^2)^2}{4c^2} 2im$ wird,

dann ist

$$\sqrt{\cos^2 z + 2ix} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}im}{c^2}}\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{5i}{c^2}}\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}$$

Aus (A) wird:

$$(B)\ldots \delta\vartheta = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5i}} \sin z \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\, e^{-x} \\ \displaystyle + \frac{\alpha}{i}\int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\,(2e^{-2x} - e^{-x}) \\ \displaystyle - f\int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\,(4e^{-2x} - 3e^{-x} + xe^{-x}) \end{array} \right.$$

Nehmen wir erst das erste Integral und setzen

$$\frac{x}{m} = t,$$

wodurch

$$e^{-x} = e^{-mt}$$

$$dx = m\,dt \qquad \text{wird,}$$

Digitized by Google

so haben wir

$$\int_0^1 \frac{c\,dt\,.\,m\,.\,e^{-mt}}{\left((1-c^2)^2+4c^2t\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Der Nenner nach Potenzen von c entwickelt ist

$$\left((1-c^2)^2+4c^2t\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + c^2(1-2t) + c^4(1-6t+6t^2) + \ldots.$$

$$+c^{2n}\left(1-n.(n+1).t+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{\frac{1.2}{1}\cdot\frac{2.4}{2.2}}t^2-\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{\frac{1.2.3}{2}\cdot\frac{2.4.6}{2.2}}t^3+\ldots\right)$$

und aus (12) wird:

$$\int_0^1 m\,dt\,e^{-mt}\left\{c + c^3(1-2t) + c^5(1-6t+6t^2) + \ldots.\right.$$

$$\left. + c^{2n+1}\left(1-n(n+1)t+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2\ .\ 2}t^2-\ldots.\right)\right.$$

Das erste Glied hiervon integrirt ist:

$$c\int_0^1 m\,dt\,e^{-mt} = c - c\,e^{-m}$$

das 2te giebt

$$c^3\int_0^1 m\,dt\,e^{-mt} - 2c^3\int_0^1 m\,t\,dt\,e^{-mt} = \left(1-\frac{2}{m}\right)c^3 + \left(1+\frac{2}{m}\right)c^3\,e^{-m}$$

wenn man vorher die letzte Hälfte durch theilweise Integration aufgelöst hat.

Das $(n+1)$ Glied hat die Form

$$c^{2n+1}\int_0^1 m\,.\,dt\,e^{-mt}\left\{1-n\,.\,(n+1)\,t+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.2}t^2-\ldots.\right\}$$

welches, wenn man wieder die theilweise Integration zu Hülfe nimmt, gleich wird:

$$\left.\begin{array}{l}
c^{2n+1}\left\{1-n\,\frac{n+1}{m}+\frac{n.(n-1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{m^2}-\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right. \\
\qquad\left.\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{m^3}+\ldots.\right\} \\
-c^{2n+1}e^{-m}\left\{1-\frac{n.(n+1)}{1}\,\frac{1}{1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right. \\
\qquad\left.\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}+\ldots.\right\} \\
+c^{2n+1}e^{-m}\,\frac{n.(n+1)}{m}\left\{1-\frac{n-1.n+2}{2}\,\frac{1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{(n+2)(n+3)}{1.2}-\ldots.\right\} \\
-c^{2n+1}e^{-m}\,\frac{n.(n-1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{m^2}\left\{1-\frac{n-2}{1.2.3}\,\frac{n+3}{1}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\right. \\
\qquad\left.\frac{(n+3)(n+4)}{1.2}-\ldots.\right\}
\end{array}\right\} \quad (13)$$

+ etc. etc.

Alle in den Klammern eingeschlossenen Reihen, die erste ausgenommen, sind aber $= \pm 1$ und dadurch wird der Ausdruck sehr vereinfacht.

Digitized by Google

Haben wir nämlich

$$\psi = t - t^2$$

so ist $$\psi^n = t^n (1-t)^n$$

und

$$(\alpha) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n \psi^n}{1.2.3 \ldots n . dt^n} &= 1 - n(n+1)t + \frac{n.(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{t^2}{1.2} - \ldots \\ &= 1 - \frac{n.n+1}{m}\frac{s}{1} + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{n+1.n+2}{m^2}\frac{s^2}{1.2} - \ldots . \end{aligned} \right.$$

wenn man

$$t = \frac{s}{m} \quad \text{setzt.}$$

Setzt man in $\psi^n = t^n (1-t)^n$ t statt $1-t$ und $1-t$ statt t, so wird die Function nicht geändert; macht man dieselbe Veränderung im 1sten, 2ten, 3ten . . . nten etc. Differentialcoefficienten, so ändert sich auch darin nichts, ausser, dass das Zeichen bald positiv, bald negativ wird, je nachdem n ungrade oder grade ist; man hat also:

$$(\beta) \ldots . \frac{d^n \psi^n}{1.2.3..dt^n} = \pm\, 1 - n.(n+1)\frac{1-t}{1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{(1-t)^2}{1.2} - \ldots .$$

$$= \pm\, 1 - n.\frac{n+1}{m}\frac{m-s}{1} + n.\frac{n-1}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{m^2}\frac{(m-s)^2}{1.2} - \ldots .$$

Vergleicht man dies mit (α), so zeigt sich, dass

$$1 = \pm\, (1 - n.(n+1) + \frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n-2)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} + \ldots)$$

$$-\frac{n(n+1)}{m} = \pm\left(\frac{n.(n+1)}{m} - \frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{m} + \ldots .\right)$$

$$+\frac{n.(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2.m^2} = \pm\left(\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2}\frac{}{m^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right.$$

$$\left.\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2\,m^2} + \ldots .\right)$$

etc. etc. ist.

Wenn man links und rechts theilt, so finden sich unsre in den Klammern aufgeführten Reihen; man erhält daher, wenn man auf die Zeichen gehörig Rücksicht nimmt, für (13)

$$c^{2n+1}\int_0^1 m\,dt\,e^{-mt}\left\{1 - n(n+1)t + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.2}t^2 - \ldots .\right\}$$

$$= c^{2n+1}\left\{1 - n.\frac{(n+1)}{m} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{m^2} - \ldots .\right\}$$

$$\mp\, c^{2n+1} e^{-m}\left\{1 + n\frac{(n+1)}{m} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{(n+1).(n+2)}{m^2} + \ldots .\right\}$$

und das erste Integral von (B) oder das Integral in (12) wird

$$(14) \ldots \int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\, e^{-x} = cA_1 + c^3 A_3 + c^5 A_5 + \ldots + c^{2n+1} A_{n+1} + \ldots .$$

Digitized by Google

wo

$$A_{2n+1} = \left\{1 - n.\frac{n+1}{m} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{m^2} - \ldots\right\}$$

$$\mp e^{-m}\left\{1 + n\frac{n+1}{m} + \frac{n.(n-1)}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{m^2} + \ldots\right\} \text{ ist.}$$

Das 2te Integral in (B) hat das erste in sich und ausserdem noch

$$\int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\, 2e^{-2x} = c\int_0^1 \frac{e^{-2mt}\,2m\,dt}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2 t}}$$

wenn man wieder $\frac{x}{m} = t$ setzt, welches aber nichts anderes ist, als unser erstes Integral, wenn man 2m mit m vertauscht; sein Werth ist daher:

$$\left.\begin{array}{l} c\,a_1 + c^3 a_3 + c^5 a_5 + \ldots. \\ \text{wo } a_{2n+1} = \left\{1 - \frac{n(n+1)}{2m} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2\quad 4m^2} - \ldots.\right\} \\ \qquad \mp e^{-2m}\left\{1 + \frac{n.n+1}{2m} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2\quad 4m^2} - \ldots.\right\} \end{array}\right\} \ldots. (16)$$

Das ganze 2te Integral wird aber:

$$\frac{\alpha}{i}\int_0^m \frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) = cB_1 + c^3 B_3 + c^5 B_5 + \ldots. \quad \ldots. (17)$$

wo

$$B_1 = \frac{\alpha}{i}(a_1 - A_1)$$

$$B_3 = \frac{\alpha}{i}(a_3 - A_3)$$

$$\vdots$$

$$B_n = \frac{\alpha}{i}(a_n - A_n) \quad \text{ist.}$$

Der 3te Theil in (B) hat ausser den schon aufgelösten Integralen noch das Integral

$$\int_0^m \frac{dx.x.e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}$$

welches sich auch auf die schon bekannten zurückführen lässt. Es ist nämlich

$$\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}\, e^{-x} = \frac{(1-c^2)^2}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\, e^{-x} + \frac{4c^2}{m}\,\frac{x\,e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4c^2\frac{x}{m}}}\,\frac{2c^2}{m}$$

Digitized by Google

so erhält man

$$-\left\{\frac{e^{-x}\,2c^2}{m\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}-\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}\;e^{-x}\right. = \frac{(1-c^2)^2\,e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}$$

$$+\frac{4c^2}{m}\frac{x\,e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}-\frac{e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}\frac{2c^2}{m}$$

Multiplicirt man mit $\frac{m}{4c^2}\,dx$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und m, so kömmt, da links ein vollständiger Differentialcoefficient steht:

$$(18)\ldots\ -\frac{m}{4c^2}\,e^{-x}\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}} = \frac{m}{4c^2}(1-c^2)^2\int\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}$$

$$+\int\frac{x\,e^{-x}\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}$$

worin noch die Grenzen 0 und m zu setzen sind. Dadurch sind also die vorhin noch unbekannten Integrale auf bekannte zurückgeführt und schliesslich haben wir für das ganze 3te Integral in (B):

$$(19)\ldots\ -f\int_0^m\frac{c\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}\left(4e^{-2x}-3e^{-x}+x\,e^{-x}\right) =$$

$$-2fc\int_0^m\frac{2\,dx\,e^{-2x}}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}+\tfrac{5}{2}fc\int_0^m\frac{dx\,.\,e^{-x}}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}$$

$$+\tfrac{5}{2}f\frac{(1-c^2)^2}{c^2}\,c\int_0^m\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{(1-c^2)^2+4c^2\frac{x}{m}}}+\tfrac{5}{2}f\frac{e^{-m}}{c}(1+c^2)$$

$$-\tfrac{5}{2}f\frac{(1-c^2)}{c}$$

$$= -f\left\{C_1\,c+C_3\,c^3+C_5\,c^5+C_7\,c^7+\ldots\ldots\right\}$$

wo

$$C_1 = 2a_1-\tfrac{5}{2}A_1+5A_1-\tfrac{5}{2}A_3-\tfrac{5}{2}(1+e^{-m})$$
$$C_3 = 2a_3-\tfrac{5}{2}A_3-\tfrac{5}{2}A_1+5A_3-\tfrac{5}{2}A_5$$
$$C_5 = 2a_5-\tfrac{5}{2}A_5-\tfrac{5}{2}A_3+5A_5-\tfrac{5}{2}A_7$$
$$C_7 = 2a_7-\tfrac{5}{2}A_7-\tfrac{5}{2}A_5+5A_7-\tfrac{5}{2}A_9$$
$$\vdots$$
$$C_{2n+1} = 2a_{2n+1}-\tfrac{5}{2}A_{2n+1}-\tfrac{5}{2}A_{2n-1}+5A_{2n+1}-\tfrac{5}{2}A_{2n+3}$$
$$\vdots$$

Das hierin noch nicht enthaltene Glied:

$$-\frac{5}{2}f\frac{1}{c}\left\{1-A_1-e^{-m}\right\},$$

wird, da $A_1 = 1-e^{-m}$ ist, Null.

Digitized by Google

Die numerischen Werthe von A_1, A_3 etc., a_1, a_3 etc., C_1, C_3 etc. lassen sich leicht finden, sie sind frei von allen Constanten, nur in B_1, B_3 etc. ist $\frac{\alpha}{i}$ enthalten und es ist grade das bequeme der Ivory'schen Theorie, dass man mit veränderten Constanten so sehr leicht Tafeln entwerfen kann.

Die numerischen Werthe sind:

$$e^{-10} = 0{,}0000454, \quad e^{-20} = 0{,}0000002$$

$A_1 = 0{,}9999546$	$a_1 = 1{,}0000000$	$B_1 = 0{,}000010$	$C_1 = 0{,}000362$
$A_3 = 0{,}8000545$	$a_3 = 0{,}9000000$	$B_3 = 0{,}021866$	$C_3 = 0{,}000445$
$A_5 = 0{,}5199219$	$a_5 = 0{,}7300000$	$B_5 = 0{,}045961$	$C_5 = 0{,}059339$
$A_7 = 0{,}2801326$	$a_7 = 0{,}5350000$	$B_7 = 0{,}055760$	$C_7 = 0{,}151186$
$A_9 = 0{,}1277363$	$a_9 = 0{,}3555000$	$B_9 = 0{,}049829$	$C_9 = 0{,}204491$
$A_{11} = 0{,}0502072$	$a_{11} = 0{,}2150500$	$B_{11} = 0{,}036064$	$C_{11} = 0{,}193076$
$A_{13} = 0{,}0172805$	$a_{13} = 0{,}1189450$	$B_{13} = 0{,}022242$	$C_{13} = 0{,}142381$
$A_{15} = 0{,}0052779$	$a_{15} = 0{,}0604215$	$B_{15} = 0{,}012064$	$C_{15} = 0{,}087220$
$A_{17} = 0{,}0014467$	$a_{17} = 0{,}0283127$	$B_{17} = 0{,}005878$	$C_{17} = 0{,}046149$
$A_{19} = 0{,}0003593$	$a_{19} = 0{,}0122898$	$B_{19} = 0{,}002610$	$C_{19} = 0{,}021658$
$A_{21} = 0{,}0000815$	$a_{21} = 0{,}0049621$	$B_{21} = 0{,}001067$	$C_{21} = 0{,}009187$
$A_{23} = 0{,}0000170$	$a_{23} = 0{,}0018695$	$B_{23} = 0{,}000405$	$C_{23} = 0{,}003569$
$A_{25} = 0{,}0000036$	$a_{25} = 0{,}0006623$	$B_{25} = 0{,}000144$	$C_{25} = 0{,}001290$

Für die Horizontalrefraction ist $c = 1$ und sie wird:

$$\delta\vartheta = 2036'',52 + 184{,}50 - 148{,}51 = 2072{,}51.$$

Zwischen den Grenzen 0 und ∞ betragen die einzelnen Werthe

$$\delta\vartheta = 2036'',52 + 184{,}56 - 148{,}63 = 2072'',45.$$

Der vollständige Ausdruck für die Refraction ist in Secunden

$$\delta\vartheta = \sin z \begin{cases} c \,.\, 726'',687 + c^3 \,.\, 597'',280 + c^5 \,.\, 401'',638 + c^7 \,.\, 219'',674 \\ c^9 \,.\, 96'',012 + c^{11} \,.\, 31'',513 + c^{13} \,.\, 5'',728 - c^{15} \,.\, 1'',483 \\ - c^{17} \,.\, 2'',129 - c^{19}\, 1'',337 - c^{21} \,.\, 0'',649 - c^{23} \,.\, 0'',270 - c^{25} \,.\, 0'',102 \end{cases}$$

wo

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg \sec z + 19{,}2067840 - 20$$
$$c = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi \qquad \text{ist.}$$

Bis $z = 87^0$ reichen die Glieder bis c^{13} aus,

bei $87\frac{1}{2}^0$	betragen	die	übrigen	Glieder	0'',06
„ 88	„	„	„	„	0,14
„ $88\frac{1}{2}$	„	„	„	„	0,38
„ 89	„	„	„	„	0,86
„ $89\frac{1}{2}$	„	„	„	„	2,30
„ 90	„	„	„	„	5,91

Digitized by Google

§ 12.

Die Correction wegen Barometer und Thermometer.

Es ist nun noch nöthig aus der mittlern Refraction die wahre zu finden und wir wissen bereits aus dem frühern, dass α und i veränderlich sind, mit i ist aber auch c veränderlich.

Wir haben nämlich die Gleichungen

$$(1) \ldots\ldots \delta\vartheta = \sin z \,.\, \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \left\{ Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f\,Q_2 \right\}$$

wenn ich die einzelnen Integrale in (B) des vorigen § mit Q_0, Q_1, Q_2 bezeichne. Es ist ferner

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\sqrt{5\,i}}{\cos z} = \frac{c}{1-c^2}$$

Differentiiren wir Gleichung (1) und vernachlässigen wir $\alpha\, d\,\alpha$, so haben wir:

$$\delta\vartheta + d(\delta\vartheta) = \delta r = \sin z \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \left(\left\{ 1 + \frac{d\alpha}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{di}{i} \right\} \left\{ Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f\,Q_2 \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{d\,c}{c} \frac{d(Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f Q_2)}{d\,c}\, c + \left\{ \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{di}{i} \right\} \frac{\alpha}{i} Q_1 \right)$$

und aus (2) ist:

$$\frac{d\,c}{c} = \tfrac{1}{2} \frac{di}{i} \frac{1-c^2}{1+c^2}$$

daher

$$\delta r = \delta\vartheta \left(1 + \frac{d\alpha}{\alpha} \right) - \sin z \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \frac{di}{i} \left\{ \frac{Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f\,Q_2}{2} - \tfrac{1}{2} c \frac{1-c^2}{1+c^2} \frac{d(Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f Q_2)}{d\,c} \right\}$$

$$+ \sin z \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \left(\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{di}{i} \right) \frac{\alpha}{i} Q_1$$

Setzen wir:

$$(3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} T = \sin z \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \beta \left\{ \frac{1}{2}(Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f\,Q_2) - \frac{1}{2} \frac{1-c^2}{1+c^2} c \frac{d(Q_0 + \frac{\alpha}{i} Q_1 - f Q_2)}{d\,c} + 2 \frac{\alpha}{i} Q_1 \right\} \\ b = \sin z \frac{\alpha(1+\alpha)}{\sqrt{5\,i}} \frac{\alpha}{i} \frac{Q_1}{B} \end{array} \right.$$

wo β den Ausdehnungscoefficient der Luft für 1° Wärme, B den Normalstand des Barometers bedeutet, so haben wir:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \delta r = \delta\vartheta \left(1 + \frac{d\alpha}{\alpha} \right) - \frac{T}{\beta} \frac{di}{i} + b\,.\,B \left(\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{di}{i} \right)$$

Nach dem frühern ist, wenn α_0, i_0 die Constanten für die mittlern Temperaturen τ_0 der Luft, τ_0' des Quecksilbers und den mittlern Barometerstand

Digitized by Google

B bezeichnen, wenn α, i die wahren Constanten bei den Temperaturen τ, τ' und dem Barometerstande p sind, und β' der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers ist:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{p}{B} \frac{1}{1+\beta'(\tau'-\tau'_0)} \frac{1}{1+\beta(\tau-\tau_0)}$$

$$i = i_0\left(1+\beta(\tau-\tau_0)\right)$$

daher:

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{p}{B} \frac{1}{1+\beta'(\tau'-\tau'_0)} \frac{1}{1+\beta(\tau-\tau_0)} - 1$$

$$1 + \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{p}{B} \frac{1}{1+\beta'(\tau'-\tau'_0)} \frac{1}{1+\beta(\tau-\tau_0)}$$

$$\frac{i-i_0}{i_0} = \frac{di}{i} = \beta(\tau-\tau_0)$$

$$\frac{di}{i} + \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{p}{B} \frac{1}{1+\beta'(\tau'-\tau_0')} \frac{1}{1+\beta(\tau-\tau_0)} - 1 + \beta(\tau-\tau_0)$$

$$= \frac{p-B}{B},$$

wenn man die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt.

Dies eingesetzt in (4) giebt:

$$\delta r = \frac{\delta\vartheta}{1+\beta(\tau-t_0)} \frac{p}{B(1+\beta'(\tau'-\tau'_0))} - T(\tau-\tau_0) - b(B-p) \quad \ldots\ldots (5)$$

Ivory hat für $\tau_0 = \tau'_0 = 50^0$, β für 1° Fahrenheit $= \frac{1}{480}$, $\beta' = \frac{1}{10000}$, B $=$ 30 Engl. Zoll und damit wird (5)

$$\delta\vartheta = \frac{\delta\vartheta}{1+\frac{1}{480}(\tau-50)} \frac{p}{30\left(1+\frac{\tau'-50}{10000}\right)} - T(\tau-50) - b(30-p) \quad \ldots (6)$$

und die numerischen Werthe von T und b sind nach den frühern numerischen Werthen von A_1, A_3 etc., B_1, B_3 etc.

$$T = \sin z \left\{0'',369\, c^3 + 0'',685\, c^5 + 0'',712\, c^7 + 0'',530\, c^9 + 0'',317\, c^{11} + 0'',159\, c^{13}\right\}$$

$$b = \sin z \left\{0'',530\, c^3 + 1'',113\, c^5 + 1'',350\, c^7 + 1'',207\, c^9 + 0'',873\, c^{11} + 0'',539\, c^{13}\right\} \quad \ldots (7)$$

§ 13.

Theorie von Lubbock.

Im Jahre 1840 publicirte Lubbock Refractionstafeln und 1855 veröffentlichte er seine vollständige Theorie. Die Art der Ableitung ist der Ivory'schen ganz ähnlich und die Annahme der Function für die Temperaturabnahme lässt sie auf jene zurückführen. Die Function genügt ebenso gut, wie die schönen Theorien von Schmidt und Ivory, den Beobachtungen, und in § 15 werden wir sehen, dass die Differenzen im Drucke der Luft und in der Temperatur erst in solchen Höhen beträchtlich werden, bis zu welchen wohl schwerlich die Experimente der Physiker sich werden erstrecken können.

Digitized by Google

Die Theorie von Lubbock giebt für die Horizontalrefraction nahe dasselbe Resultat wie die Ivory'sche, der Ausdruck für die Refraction ist eine ähnliche Reihe, die aber noch viel schneller convergirt, als die von Ivory.

Lubbock setzt, wenn wir die frühern Bezeichnungen beibehalten:

$$(1) \quad \frac{1+m\tau}{1+m\tau^0} = \frac{p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E}{p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left\{ \frac{1 - E\, p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - E\, p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right\}$$

wo γ und E Constanten sind.

Biot hat in der Connaissance des temps pour 1841 eine Tafel gegeben mit den von Gay-Lussac bei seiner Luftfahrt beobachteten Daten, und aus verschiedenen Beobachtungen findet Lubbock für γ und E die Werthe

$$\gamma = 1{,}4910 \qquad E = -1{,}1618$$

er nimmt dafür γ [1]) = 1,5 und E entsprechend = — 1,1919 und aus (1) wird:

$$(2) \quad \frac{1+m\tau_0}{1+m\tau} = \frac{p_0^{-\frac{1}{3}} - E}{p^{-\frac{1}{3}} - E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1 - E\, p_0^{\frac{1}{3}}}{1 - E\, p^{\frac{1}{3}}}$$

Da

$$\frac{1+m\tau_0}{1+m\tau} \cdot \frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

so ist

$$(3) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p\,(p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)}{p_0\,(p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)} = \frac{p^{\frac{2}{3}} - pE}{p_0^{\frac{2}{3}} - p_0 E}$$

Setze ich

$$(4) \quad \left\{ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - q, \quad \frac{1 - E\, p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - E\, p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - H\, q, \right.$$

wodurch

$$H = - \frac{E\, p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - E\, p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

so wird aus (1) und (3)

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{1+m\tau}{1+m\tau_0} = (1-q) \times \dfrac{1}{(1-Hq)} \\ \dfrac{\varrho}{\varrho_0} = (1-q)^{\frac{1}{\gamma-1}} (1-Hq) \end{cases}$$

---

[1]) Dulong findet für vollkommen trockne Luft $\gamma = 1{,}421$. Siehe Poisson's Mécanique Tom. II. § 637.

Digitized by Google

Um aus der Barometerhöhe und der Temperatur die Höhe über der Erdoberfläche berechnen zu können, haben wir nach § 2:

$$dp = -g_0 \frac{a^2}{(a+h)^2} \varrho \, dh$$

und da nach (3)

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p\,(p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)}{p_0\,(p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)} \text{ ist}$$

$$\frac{a^2\,dh}{(a+h)^2} = -\frac{p_0\,(p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)}{\varrho_0\, g_0} \frac{dp}{p\,(p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)} = -l\,(p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E) \frac{dp}{p\,(p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E)},$$

welches in 2 Partialbrüche zerlegt und integrirt, mit Bestimmung der Constante für $h = 0$, giebt

$$\frac{h}{1+\frac{h}{a}} = -l \frac{\left\{p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E\right\}}{\frac{1-\gamma}{\gamma} E} \lg \left\{ \frac{p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E}{p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - E} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$= -\frac{l}{\frac{1-\gamma}{\gamma} H} \lg (1 - Hq) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Für $\gamma = 1{,}5$ wird aus (5) und (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho}{\varrho_0} &= (1-q)^2\,(1-Hq) \\ \frac{h}{1+\frac{h}{a}} &= \frac{3l}{H} \lg (1-Hq) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

wobei $q = 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$, H, für $p_0 = 1$, $= 0{,}54378$.

Für die Grenze der Atmosphäre ist $p = 0$, $q = 1$ und h wird aus (8) gleich der Höhe der Atmosphäre etwa 4,8 Meilen, die Temperatur an der Grenze wird aus (5), bei $m = 0{,}00375$ für 1° C., — 266°,67 C. = — 448° Fahrenheit.

Lubbock setzt, um das in (1) gegebene Wärmegesetz bequemer anwenden zu können

$$\left.\begin{aligned} \lg (1 - Hq) &= -u \\ (1 - Hq) &= e^{-u} \\ q &= \frac{1 - e^{-u}}{H} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

dadurch wird

und aus (9) wird

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{H^2} e^{-u} \left\{ e^{-u} - 1 + H \right\}^2$$

Digitized by Google

Setzt man

$$(11) \ldots \ldots \ldots \ldots \begin{cases} u = u'' - U \\ e^{-u''} = 1 - H \end{cases}$$

so hat man:

$$(12) \ldots \ldots \ldots \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{(1-H)^3}{H^2} \left\{ e^{3U} - 2\,e^{2U} + e^{U} \right\}$$

Gehen wir zur Refraction über, so haben wir nach § 11 die Gleichung:

$$d\,\delta\vartheta = \alpha\,(1+\alpha)\sin z \frac{d\,w}{\sqrt{\frac{1-2\,\alpha\,w}{\left(1-\frac{\sigma}{a}\right)^2} - \sin^2 z}}$$

wo $$\sigma = \frac{h}{1+\frac{a}{h}} = -\frac{l}{\frac{1-\gamma}{\gamma}H} \lg(1-Hq) = \frac{l}{\frac{1-\gamma}{\gamma}H}\,u$$

nach (8) und (10) und $= a\,i\,u$

$$(13) \ldots \ldots \ldots \ldots \text{wenn } i = \frac{l}{a\,\frac{1-\gamma}{\gamma}H} \text{ gesetzt wird, ist;}$$

dadurch wird

$$\frac{1-2\,\alpha\,w}{\left(1-\frac{\sigma}{a}\right)^2} = \frac{1-2\,\alpha\,w}{(1-i\,u)^2} = 1 - 2\,\alpha\,w + 2\,i\,u + 3\,i^2\,u^2 + \ldots.$$

wofür wir, wenn wir $i\,u - \alpha\,w = x\,i$, also

$$(14) \ldots \ldots \ldots x = u - \frac{\alpha}{i}\,w \text{ setzen, erhalten:}$$

$$\frac{1-2\,\alpha\,w}{(1-i\,u)^2} = 1 + 2\,i\,x + 3\,i^2\,x^2 + \ldots.$$

so dass wir dadurch bekommen:

$$d\,(\delta\vartheta) = \alpha\,(1+\alpha)\sin z \frac{d\,w}{\sqrt{\cos^2 z + 2\,i\,x + 3\,i^2\,x^2}}$$

einen vollkommen ähnlichen Ausdruck, wie in der Theorie von Ivory § 11. Wir theilen ihn in 2 Theile und haben:

$$(15) \ldots d\,\delta\vartheta = \alpha\,(1+\alpha)\sin z \frac{d\,w}{\sqrt{\cos^2 z + 2\,i\,x}} - \tfrac{3}{2}\,\alpha\,(1+\alpha)\sin z \frac{i^2\,x^2\,d\,w}{(\cos^2 z + 2\,i\,x)^{\frac{3}{2}}}$$

Das 2te Glied ist wieder, wie in den Theorien von Laplace und Ivory sehr klein, kaum 2″, wir könnten es daher vernachlässigen, es ist aber ein sehr leichtes es mitzunehmen, wie wir gleich sehen werden.

Betrachten wir zuerst das erste Glied, so sind darin noch 2 Variable w und x, die durch unsre Gleichungen (10), (11) und (14) von einander abhängig sind.

Nach (12) ist:

$$(16) \ldots \frac{\varrho}{\varrho_0} = (1-w) = \frac{(1-H)^3}{H^2} \left\{ e^{3U} - 2\,e^{2U} + e^{U} \right\}$$

$$= \frac{(1-H)^3}{H^2} \left\{ U^2 + 2U^3 + \frac{50}{24}U^4 + \frac{180}{120}U^5 + \ldots + \frac{1+3^n-2^{n+1}}{1.2.3\ldots n}U^n + \ldots \right\}.$$

Digitized by Google

Es ist

$$\left.\begin{aligned} U &= u'' - u \\ &= u'' - x - \frac{\alpha}{i} w \\ &= \left(u'' - \frac{\alpha}{i}\right) - x + \frac{\alpha}{i}(1 - w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

und nennen wir

$$\left.\begin{aligned} u'' - \frac{\alpha}{i} &= x'' \\ (x'' - x) &= X \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

so haben wir

$$\begin{aligned} X &= U - \frac{\alpha}{i}\frac{\varrho}{\varrho_0} \\ &= U - \frac{\alpha}{i} f(U) \end{aligned}$$

und nach Lagrange's Theorem ist:

$$U = X + \frac{\alpha}{i} fX + \frac{\alpha^2}{1.2\,i^2}\frac{d(fX)^2}{dX} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Aus

$$X = U - \frac{\alpha}{i}\frac{\varrho}{\varrho_0}$$

folgt

$$\frac{\alpha}{i}\frac{\varrho}{\varrho_0} = U - X$$

und mit (19)

$$= \frac{\alpha}{i} fX + \frac{\alpha^2}{1.2\,i^2}\frac{d(fX)^2}{dX} + \ldots.$$

oder

$$1 - w = fX + \frac{\alpha}{1.2\,i}\frac{d(fX)^2}{dX} + \frac{\alpha^2}{2\,3\,i^2}\frac{d^2(fX)^3}{dX^2} + \ldots.$$

und daraus

$$-\frac{dw}{dX} = \frac{dw}{dx} = \frac{d(fX)}{dX} + \frac{\alpha}{2.i}\frac{d^2(fX)^2}{dX^2} + \frac{\alpha^2}{2.3.i^2}\frac{d^3(fX)^3}{dX^3} + \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

durch welche Gleichung dw in dx ausgedrückt ist.

Um $\frac{dfX}{dX}$, $\frac{d^2(fX)^2}{dX^2}$ etc. zu finden, brauchen wir nur in (16) U mit X zu vertauschen und wir haben

$$\left.\begin{aligned} fX &= \frac{(1-H)^2}{H^2}\left\{X^2 + 2X^3 + \frac{50}{24}X^4 + \frac{180}{120}X^5 + \ldots \frac{1 + 3^n - 2^{n+1}}{1.2.3..n}X^n + \ldots\right. \\ &\text{Daraus} \\ (fX)^2 &= \frac{(1-H)^6}{H^4}\left\{X^4 + 4X^5 + 8\tfrac{1}{3}X^6 + 11\tfrac{1}{3}X^7 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\right. \\ (fX)^3 &= \frac{(1-H)^9}{H^6}\left\{X^6 + 6X^7 + 18\tfrac{1}{4}X^8 + 37\tfrac{1}{2}X^9 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\right. \\ (fX)^4 &+ \frac{(1-H)^{12}}{H^8}\left\{X^8 + 8X^9 + 32\tfrac{1}{3}X^{10} + 88X^{11} + \ldots\ldots\ldots + \ldots\right. \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots (21)$$

Digitized by Google

Führt man noch $(f X)^5$ etc. aus und differentiirt, so erhält man schliesslich:

$$(22) \ldots \frac{dw}{dx} = A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + A_4 X^5 + A_6 X^6 + \ldots.)$$

wo A_1, A_2, A_3, etc. aus (21) folgende Zahlenwerthe sind.

Führt man noch in (15) Hülfsgrössen ein, wie wir es bei Ivory gethan, indem wir:

$$(23) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos z = \frac{\sqrt{2ix''}}{\operatorname{tg}\varphi},\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = c,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{2c}{1-c^2} \\ \text{setzen, wodurch} \\ \sqrt{\cos^2 z + 2ix} = \frac{\sqrt{2ix''}}{2c}\sqrt{(1-c^2)^2 + \frac{4c^2 x}{x''}} \\ \text{wird, und setzt man noch} \\ \sqrt{(1-c^2)^2 + \frac{4c^2 x}{x''}} = 1 - c^2 + 2c^2\zeta \\ \text{wodurch} \\ x = x''\zeta - x'' c^2(\zeta - \zeta^2) \\ dx = (x'' - x'' c^2 + 2x'' c^2 \zeta)\, d\zeta, \end{array} \right.$$

also

$$\alpha(1+\alpha)\sin z \frac{\frac{dw}{dx}}{\sqrt{\cos^2 z + 2ix}} dx = \frac{2c.\alpha(1+\alpha)\sin z \frac{dw}{dx} d\zeta . x''}{\sqrt{2ix''}}$$

oder

$$d\delta\theta = \frac{2\alpha(1+\alpha)\sin z}{\sqrt{2ix''}} x'' c \left\{A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + A_4 H^4 + \ldots\right\} d\zeta$$

wird.

Weil $$X = (x'' - x) = x''(1-\zeta)(1+c^2\zeta),$$

so hat man schliesslich

$$(24) \ldots d\delta\theta = \frac{2\alpha(1+\alpha)\sin z}{\sqrt{2ix''}} x'' c \left\{A_1\left\{x''(1-\zeta)(1+c^2\zeta)\right\} + A_2\left\{x''(1-\zeta)(1+c^2\zeta)\right\}^2 + A_3\left\{x''(1-\zeta)(1+c^2\zeta)\right\}^3 + \ldots\right\} d\zeta$$

und wenn man integrirt und bedenkt, dass die Grenzen für ζ zu 0 und 1 geworden, ausserdem nach der theilweisen Integration

$$\int_0^1 \zeta^m (1-\zeta)^n d\zeta = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)}$$

ist, so erhält man für das erste Glied in (15)

$$(25) \ldots \delta\theta = \frac{2\alpha(1+\alpha)\sin z}{\sqrt{2ix''}} \left\{ \begin{array}{l} \left\{\frac{A_1 x''^2}{2} + \frac{A_2 x''^3}{3} + \frac{A^3 x''^4}{4} + \ldots\right\} c \\ + \left\{\frac{A_1 x''^2}{2.3} + \frac{2A_2 x''^3}{3.4} + \frac{3A_3 x''^4}{4.5} + \ldots\right\} c^3 \\ + \left\{\frac{2.A_2 x''^3}{3.4.5} + \frac{3.2.A_3 x''^4}{4.5.6} + \frac{4.3 A_4 x''^5}{5.6.7} + \ldots\right\} c^5 \\ + \left\{\frac{3.2.1 A_3 x''^4}{4.5.6.7} + \frac{4.3.2 A_4 x''^5}{5.6.7.8} + \frac{5.4.3 A_5 x''^6}{6.7.8.9} + \ldots\right\} c^7 \\ + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Aus (21) ergeben sich die numerischen Werthe, sobald man H, i, α, kennt; Lubbock nimmt für H, wie schon erwähnt, 0,54378, für i = 0,0071564, für α = 0,00028348 bei 30 Engl. Zoll und 50° F. an, damit wird $\lg \frac{(1-H)^3}{H^2}$ = 9,5066765, x'' = 0,74514, und es wird:

$A_1 = 0{,}6422$, $A_2 = 1{,}9513$, $A_3 = 2{,}8406$, $A_4 = 2{,}9203$, $A_5 = 2{,}6389$,
$A_6 = 2{,}4052$, $A_7 = 2{,}2956$, $A_8 = 2{,}2373$, $A_9 = 2{,}1827$, $A_{10} = 1{,}0848$,
$A_{11} = 2{,}6882$, $A_{12} = 2{,}0741$, $A_{13} = 1{,}9924$, $A_{14} = 1{,}8466$.

Damit findet sich sofort nach (22) $\frac{dw}{dx}$ und nach (25) wird

$$\delta\theta = \sin z \left\{1132'',8\, c + 639'',9\, c^3 + 220'',4\, c^5 + 60'',5\, c^7 + 17'',8\, c^9 + 5'',5\, c'' + \ldots\right\} . \quad (26)$$

Das 2te Glied in (15) ist

$$-\tfrac{3}{2}\alpha(1+\alpha)\sin z \frac{i^2 x^2\, dw}{(\cos^2 z + 2ix)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3.4\sqrt{i}\,\alpha(1+\alpha)\sin z \times x''^2 \zeta^2 (1-c^2+c^2\zeta)^2 c^3 \frac{dw}{dx} d\zeta}{2\sqrt{2x''}\left\{1-c^2+2c^2\zeta\right\}^2}$$

$$= -\frac{3.4.\alpha(1+\alpha)\sqrt{i}\sin z . x''^2 \zeta^2 c^3}{2\sqrt{2x''}} \frac{dw}{dx} d\zeta \left\{1 - 2c^2\zeta + (5\zeta^2 - 2\zeta)c^4 - \ldots .\right\}$$

Nehmen wir nur das erste Glied in dem letzten Factor, so haben wir, wenn wir für $\frac{dw}{dx} dx$ seinen Werth setzen und integriren

$$-\frac{3.4}{2}\sqrt{i}\,\frac{\alpha(1+\alpha)\sin z}{\sqrt{2x''}} c^3 \left\{\frac{2.1 A_1 x''^2}{2.3.4} + \frac{2.1 A_2 x''^4}{3.4.5} + \frac{2.1 A_3 x''^5}{4.5.6} + \ldots\right\}$$

welches mit den genannten Werthen der Constanten — 1'',5 sin z c^3 macht, so dass die Refraction vollständig:

$$\delta\theta = \sin z \left\{1132'',8\, c + 638'',4\, c^3 + 220'',4\, c^5 + 60'',5\, c^7 + 17'',8\, c^9 + 5'',50\, c^{11} + \ldots\right\}$$

wird.

Lubbock vergleicht von ihm berechnete Tafeln noch mit denen von Ivory und Bessel und seine im Jahre 1855 publicirte Tafel unterscheidet sich von der von 1840 dadurch, dass 1855 die genauer bestimmte Bessel'sche Constante zu Grunde liegt.

§ 14.

Die Arbeiten von Kramp, Plana, Brioschi, Svanberg, Biot, Baeyer.

Kramp haben wir schon vielfach erwähnt, wir haben bereits gesagt, dass er zuerst die Hypothese, nach der die Dichtigkeit der Luft dem Drucke proportional abnimmt, d. h. die Hypothese nach welcher in allen Luftschichten eine gleiche Temperatur herrscht, analytisch durchführte, auf das Integral $\int e^{-tt} dt$ kam, dies vollständig auflöste und Tafeln dafür gab. Er behandelt nach der Emissionstheorie den Weg des Lichtes in der Luft und giebt dafür die bekannte Gleichung und zeigt, wie sie mit der Gleichung für die

Digitized by Google

Refraction zusammenhängt. Für den constanten Druck d. h. für Luftschichten von gleicher Temperatur hatte er für die Dichtigkeit die Exponentialfunction gefunden, er verändert den Exponenten, indem er einen Druck annimmt, der dem Quadrate der Distanz proportional ist, und findet, dass die Integration nur durch Reihenentwicklung möglich ist, er entwickelt und findet Glieder, die von der Form sind:

$$\alpha \operatorname{tg} z \left\{1 + B \operatorname{tg}^2 z + C \operatorname{tg}^4 z + D \operatorname{tg}^6 z + \ldots\right\}$$

er giebt den Constanten solche Näherungs-Werthe, dass diese Form bis 84° Zenithdistanz keine Secunde unsicher ist.

In einem besondern Kapitel behandelt er die Refraction in der Nähe des Horizontes und giebt dafür Ausdrücke, in denen das erste Glied die Horizontalrefraction ist; er zeigt, dass die Refraction unter dem Horizonte d. h. bei mehr als 90 Grad Zenithdistanz zusammengesetzt ist aus der Horizontalrefraction des Punctes, wo der Strahl den Horizont trifft, und aus der Refraction bis zu diesem Puncte; diese letztere ist wieder gleich der Horizontalrefraction an diesem Puncte minus der Refraction eines Sternes, der ebenso viel über dem Horizonte, als der Besbachter den Stern unter dem Horizonte sieht. Er rechnet mit seinen Formeln in der Nähe des Horizontes Tafeln und die Vergleichung mit Bradley's Tafeln ergiebt, dass diese bei 1° 15′ Höhe um 71″ fehlerhaft sind.

In seinem 5ten Kapitel untersucht er die Theorien von Euler, Bradley, Mayer und Lambert, er zeigt ihre Fehlerhaftigkeit, zeigt, dass Euler sich zu grosser Näherungen bedient habe, wodurch seine Refraction bei 45° Höhe 2¼′ wird [1]); hätte Euler in Reihen entwickelt, wie es nach seiner Theorie Oriani that, so wäre sein Endintegral das von Kramp so ausführlich behandelte $\int e^{-tt} dt$ gewesen. Simpson's und Bradley's Formeln setzen voraus, dass die Krümmung des Lichtweges immer dieselbe sei und Kramp weist nach, dass gerade aus dieser Voraussetzung die bedeutenden Fehler der Bradley'schen Tafeln von 84—90 Grad Zenithdistanz entstehen. Mayer's Formel lässt sich darstellen durch eine Gleichung 2ten Grades, solche Gleichung ist sowohl die Bradley'sche, wie die Euler'sche Formel, die Differenz der Bradley'schen und Mayer'schen Tafel beträgt auch kaum 1″ —. Er zeigt, dass Lambert's geometrischer Weg ein genaueres Resultat als Euler's physische Hypothese giebt, doch hätte Lambert die Bahn des Lichtes nicht als kreisförmig betrachten sollen. — Endlich behandelt Kramp noch die terrestrische Refraction, auf welche ich anderswo zurückkommen werde.

Plana untersucht die bei der Theorie von Young aufgeführte Hypothese über die Abnahme der Wärme von Leslie; er findet aus ihr für die Abnahme der Wärme eine harmonische Reihe und die Leslie'sche Hypothese nähert sich daher der Euler'schen vom Jahre 1754. Er berechnet für verschiedene Höhen die Temperaturen und vergleicht sie mit den Beobachtungen, die Gay-Lussac

---

[1]) Plana zeigt freilich auch, dass Euler's Formel zu grosse Näherungen hat, aber der Vorwurf von Kramp ist nicht gegründet, sie giebt bei 45° Höhe etwa 1′ Refraction.

Digitized by Google

1804, die Charles und Robert 1783 bei ihren Luftfahrten, die Zumpstein bei der Besteigung des Monte Rosa machten, von denen besonders die letzten keine genügende Uebereinstimmnng zeigen. Er führt die Laplace'sche Hypothese auf eine Modification der De-Luc'schen über die Atmosphäre zurück, zeigt aber, wessen wir bereits auch gedacht haben, dass besonders das Barometer stark von der berechneten Höhe abweiche, und ebenso beweist er, dass Bessel's Hypothese die Temperaturabnahme sehr mangelhaft darstellt.

Bei Lagrange und später haben wir gesehen, dass Bradley's Formel genügt wird, sobald man zwischen der Entfernung vom Mittelpunct der Erde und der Dichtigkeit die Relation

$$\frac{a}{r} = u^m$$

aufstellt; Plana verallgemeinert diesen Ausdruck, indem er setzt:

$$\frac{a}{r} = A u^m + (1 - A)\, u^{2m-1}$$

wo A eine Constante bedeutet und woraus für $A = 1$ die obige Annahme ein specieller Fall ist. Die Entwicklungen führen Plana auf die elliptischen Transcendenten und welchen Werth er auch für A annimmt: nach dieser Hypothese wird die Refraction im Horizonte nie über 31' 16" (welcher Werth bei $A = -20$ stattfindet). Er bekennt, wie wenig ihm diese Verallgemeinerung genützt habe und geht zurück zu $A = 1$, wofür er noch einige elegante Beweise giebt. Er zeigt noch Integrationsmethoden der Differentialgleichung der Refraction, indem er sie in ihrer grössten Allgemeinheit lässt und kömmt auf den Fall zurück, den Kramp löste, indem er die Dichtigkeit in geometrischer Progression abnehmen lässt.

Besonderes Interesse hat es, wenn Plana zeigt, dass die Differentialgleichungen für die Refraction von Lagrange, Euler und Bernoulli nicht absolut strenge sind, während die von Taylor, Bouguer und Simpson richtig sind und Lambert die strenge Gleichung umgeht, Young aber denselben Fehler eigentlich begeht, den Lagrange macht. Dieser Fehler ist so gering, dass er auf die Refraction keinen Einfluss hat; wenn es sich aber um eine strenge Gleichung handelt, so darf auch diese Vernachlässigung nicht begangen werden.

Unsre strenge richtige Gleichung in § 2 ist:

$$d\vartheta = - \frac{\frac{2N}{c^2}\, d\varrho \sqrt{1 + \frac{4N}{c^2}\varrho_0}\, .\, a \sin z}{\left(1 + \frac{4N}{c^2}\varrho\right) r \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{c^2} - \left(1 + \frac{4N\varrho_0}{c^2}\right)\frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

$$= - \frac{\frac{a}{r} \sin z\, \mu_0\, d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}}$$

Setzt man $u = a \sin z \dfrac{\sqrt{1 + \frac{4N\varrho_0}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{c^2}}} = a \sin z \dfrac{\mu_0}{\mu}$

Digitized by Google

so hat man die Lambert'sche Gleichung

$$d\,\delta\theta = \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

die auch Bernoulli hat. Aber Bernoulli setzt $1 + \frac{4N\varrho}{c^2}$ constant $= 1$ und erhält dadurch die falsche Gleichung

$$d\,\delta\theta = -\frac{2N}{c^2}\,d\varrho\,\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

Young setzt:

$$u = \frac{a \sin z}{1 + q\varrho},$$

wo q eine Constante, was mit oben verglichen nur genähert ist.

Setzt man:

$$u' = \frac{\sqrt{1 + \frac{4N\varrho_0}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{c^2}}} = \frac{\mu_0}{\mu},$$

so bekommt man die Lagrange'sche Form

$$d\,\delta\theta = \frac{\frac{a}{r}\sin z\, du'}{\sqrt{1 - u'^2\,\frac{a^2}{r^2}\sin^2 z}}$$

aus der sich leicht die Euler'sche Form finden lässt, man braucht nur $u' = \alpha^{\frac{q-k}{c}}$ zu setzen, aber die Werthe für u' von Lagrange und Euler stimmten mit dem obigen für u' nicht ganz überein, die Vernachlässigung war aber so gering, dass sie selbst für die Horizontalrefraction nur einige Bogensecunden betragen konnte.

Ausführlich zeigt Plana noch die Uebereinstimmung der Bouguer'schen Theorie mit der Simpson'schen und besonders hebt er noch hervor, dass Bouguer auch für die Refraction für mehr als 90° Zenithdistanz die richtige Idee gegeben hat; Euler's Formel ist nicht brauchbar für so grosse Zenithdistanzen. Mayer's Formel leitet er aus der Euler'schen ab, welches sehr leicht geht.

Endlich behandelt er noch ausführlich die von Ivory in den Philosophical Transactions für 1823 gegebene Refractionstheorie und zeigt verschiedene Arten der Integration. Ivory hat die Grösse f zu $\frac{1}{4}$ angenommen, 1838 für diesen Werth $\frac{1}{5}$, Brioschi hat unter dem Titel „Comentarj astronomici de' Memorie de Mr. Ivory" die Rechnung mit $f = \frac{1}{5}$ durchgeführt, aber fast dasselbe Resultat erhalten. Plana giebt die Horizontalrefraction für $f = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0$ an, ersteres ist bekanntlich die Cassini'sche, das 2te die Simpson'sche, das letzte die Newton'sche Hypothese. Beobachtungen von Oriani in den Mailänder Ephemeriden zeigen dass f zwischen 0,12 und 0,33 schwankt.

Svanberg giebt in den Actis novis Reg. Societ. Upsal. Vol. IX. Entwicklungen, die zu dem Simpson'schen Resultat führen und zeigt, dass sie bis

Digitized by Google

70 Grad Zenithdistanz mit den neuen Tafeln nahe übereinstimmen, bei 84° Zenithdistanz aber 2″ abweichen, im Horizonte an 5′. In Vol. XI. setzt er die Arbeit fort, er nimmt zwischen der Dichtigkeit in der Atmosphäre in der Höhe x und der an der Oberfläche der Erde, wenn h die Höhe der Atmosphäre bedeutet, an:

$$\varrho = \varrho_0 \frac{h - x}{h + x}$$

damit findet er die Höhe der Atmosphäre für 0,76 Meter Barometerstand und 0° Temperatur

$$h = 20614 \text{ Meter, etwa über } 2\tfrac{1}{4} \text{ Meilen,}$$

er führt damit die Rechnung durch und findet für die Horizontalrefraction 35′ 1″,46, ein Resultat, welches innerhalb der Grenzen fällt, die man für die Horizontalrefraction angiebt; in 84 Grad Zenithdistanz ist der Werth 2″ kleiner als der von Laplace, aber nur 0″,3 kleiner als der von Bessel.

Er sucht aus den schon mehrfach erwähnten Daten von Gay-Lussac das Gesetz der Dichtigkeit der Atmosphäre zu bestimmen, er setzt z. B.

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{\frac{h - l\varrho_0}{l\varrho_0}}$$

und findet für die Höhe der Atmosphäre 51118 Meter, aber die Durchführung der Hypothese für die Temperatur zeigt, dass Gay-Lussac statt — 9°,5 in der höchsten Höhe

$$-71°$$

hätte beobachten müssen. Er verwirft diese Hypothese und geht über zu:

$$\varrho = \varrho_0 \left\{1 + B\frac{x}{l} + C\left(\frac{x}{l}\right)^2 + D\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} e^{-A\frac{x}{l}}$$

und findet, dass den Beobachtungen ziemlich genügt wird durch die Werthe

$$A = 1{,}27692;\ B = 0{,}45514,\ C = 0,\ D = -0{,}02759$$

oder $C = -0{,}06482$, $D = 0$, oder $C = -0{,}11611$, $D = 0{,}05010$.

Er substituirt den Werth von ϱ in die Differentialgleichung der Refraction und führt für die Horizontalrefraction mit allen 3 Hypothesen von C und D die analytische, wie die numerische Rechnung durch. Er findet als Resultat Werthe, die nur etwa um 11″ abweichen und zwischen diesen Resultaten liegt derjenige Werth, welchen Groombridge für den richtigsten hält, und um diesem ganz zu genügen würde man haben

$$A = +1{,}27662,\ B = 0{,}44135,\ C = -0{,}02326,\ D = -0{,}018392.$$

Nur in dieser Kürze erwähne ich der Svanberg'schen Arbeiten, seine Theorien zeigen wieder, was bei Ivory bereits erwähnt wurde, dass die Horizontalrefraction grade wegen ihrer Unsicherheit nie das Mittel sein wird, das Gesetz der Dichtigkeit der Atmosphäre zu bestimmen. Die Svanberg'sche Theorie ist in unsern frühern gewissermaassen enthalten, nur dass

Digitized by Google

die Coefficienten A, B, C, D andere Werthe haben; es ist ein leichtes aus den Theorien von Bessel, Schmidt und Ivory für ϱ die obige Form herzuleiten, und aus diesen Theorien Tafeln zu berechnen ist gegen die Svanberg'sche Form so sehr viel leichter (Svanberg braucht zu seinen numerischen Rechnungen für die Horizontalrefraction allein 20 freilich nicht eng gedruckte Seiten), dass wohl jeder diese Formen vorziehen wird. Meines Wissens hat auch niemals jemand nach Svanberg gerechnet, niemals sind genaue Tafeln von ihm erschienen.

Noch habe ich der Arbeiten von Biot zu gedenken und über seine Constitution der Atmosphäre besonders zu berichten. Was die Refraction anbetrifft, so ist er der Meinung, dass die Theorie von Laplace vollkommen genüge, denn die Unsicherheit der Beobachtungen in der Nähe des Horizontes sei so gross, dass man nie wisse, wann man eigentlich die wahre normale Refraction beobachtet habe, Störungen durch Localeinflüsse, durch Ausstrahlung der Wärme, durch verschiedene Feuchtigkeit seien immer vorhanden und werden zu verschiedenen Zeiten verschiedene Resultate geben.

In der Connaissance des temps pour 1839 behandelt Biot die Bedingungen des Gleichgewichts der Atmosphäre und besonders den Einfluss der Feuchtigkeit. Ist φ^0 die elastische Kraft des Wasserdampfes an der Erdoberfläche, p_0 die der trocknen Luft, so haben zahlreiche Experimente gelehrt, dass das Verhältniss der Dichtigkeit der trocknen und feuchten Luft ist

$$1 : 1 - \frac{3}{8}\frac{\varphi_0}{p_0}$$

Die Höhe einer gleich dichten feuchten Atmosphäre wird durch

$$l = \frac{l_0}{1 - \frac{3}{8}\frac{\varphi_0}{p_0}}$$

und die Dichtigkeit durch

$$(\varrho_0) = \varrho_0 \left(1 - \frac{3}{8}\frac{\varphi_0}{p_0}\right) \text{ ausgedrückt.}$$

Für eine bestimmte Höhe, in der die Dichtigkeit ϱ, der Druck p, die Spannung φ, die Temperatur τ ist, hat man dann die Gleichung

$$\frac{(p - 100\,m\varphi)\,\varrho_0}{(p_0 - 100\,m\varphi_0)\,\varrho} = \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0}$$

wo $m = 0{,}00375$, $100\,m = \frac{3}{8}$ ist.

Ist die Luft vollkommen mit Wasserdämpfen gesättigt, so findet Biot aus Experimenten von Gay-Lussac und Arago, dass die Länge f einer Quecksilbersäule, in Millimeter angegeben, die dem Wasserdampf das Gleichgewicht hält, ausgedrückt werden kann durch die Gleichung

$$\lg f_1 = a - a_1\,\alpha_1^{\,x} - a_2\,\alpha_2^{\,x}$$

wo $x = 20^0 + \tau$, $a = 5{,}96131$, $\lg a_1 = 9{,}82341$, $\lg a_2 = 0{,}74111$,
$\lg \alpha_1 = -0{,}01310$, $\lg \alpha_2 = -0{,}00213$

Für 0° Wärme z. B. ist $f_1 = 3{,}992$ Millimeter
10 „ „ „ „ = 8,602 „
30 „ „ „ „ = 31,634 „

Digitized by Google

Aus physischen Gründen ist die Luft wohl nie ganz mit Wasserdampf gesättigt und wäre $\frac{\varphi}{p}$ immer constant, so hätte, da

$$(\varrho) = \left(1 - 100\,\mathrm{m}\,\frac{\varphi}{p}\right)\varrho$$

der Wasserdampf in der Luft gar keinen Einfluss. Diese Bedingungen sind wohl nicht ganz vorhanden, aber doch haben alle Experimente von Arago und Biot etc. bestätigt, dass die brechende Kraft der feuchten Luft von der der trocknen bei demselben Luftdruck und derselben Temperatur kaum merklich verschieden ist und die in der Theorie von Laplace gegebenen numerischen Werthe nie die dort angegebene Grösse erreichen. Mit Recht haben daher Bessel, Schmidt, Ivory keine weitere Rücksicht auf die feuchte Luft genommen und meines Wissens berücksichtigt bis jetzt kein Astronom das Hygrometer bei den Refractionsbeobachtungen.

Schon bei Newton ist erwähnt, dass Biot die mechanische Integration auf die Newton'sche Hypothese anwendet und fast genau die von Halley gegebenen Werthe erhält. — Biot geht aber noch weiter, er zeigt dass man mit jeder Hypothese über die Dichtigkeit der Luft, sei es welche es wolle, die Refraction durch mechanische Quadratur finden könne und auf die Ivory'sche Theorie wendet er seine gefundenen Formeln an und findet die Ivory'sche Horizontalrefraction bis auf 1″,2 genau, eine Näherung, die vollkommen genügend ist. Darauf zeigt er das Verhältniss der Constitution der Atmosphäre nach Ivory's Theorie zu der Laplace'schen und in der Connaissance des temps pour 1841 geht er über, die Constitution der Atmosphäre zu bestimmen. Er giebt dazu 22 Beobachtungen und zwar Barometerhöhen, Thermometergrade und Hygrometergrade, welche Gay-Lussac auf seiner berühmten Luftfahrt gemacht hat und bedauert die Originalbeobachtungen bei einer von ihm und Gay-Lussac unternommenen Luftfahrt desshalb nicht geben zu können, weil er sie verloren habe. Er berechnet aus den Gay-Lussac'schen Beobachtungen und auch aus den Humboldt'schen Beobachtungen am Aequator in aller Strenge, mit Berücksichtigung der Veränderung der Schwerkraft in verschiedenen Breiten wegen der Abplattung der Erde, mit Berücksichtigung der Aenderung der grössern Entfernung vom Mittelpunct durch die verschiedenen Höhen über der Oberfläche der Erde, mit Berücksichtigung des Einflusses der Feuchtigkeit, den Luftdruck und die Dichtigkeit und stellt zwischen beiden die Gleichungen:

$$\frac{p}{p_0} = A\,\frac{\varrho}{\varrho_0} + B\,\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} + C$$

auf, eine Gleichung, die construirt einen Kegelschnitt, für $B = 0$ eine grade Linie giebt. Aus verschiedenen Beobachtungen findet Biot für A und B und C verschiedene Werthe, sowohl aber die grade Linie, wie die Parabel erfordern für C einen negativen Werth, sodass, wenn der Druck p bereits 0 ist, die Dichtigkeit nicht auch 0 ist, wie es einige Hypothesen bei den verschiedenen Theorien bedingen. Mit den verschiedenen Hypothesen untersucht er noch

Digitized by Google

die Wärmeabnahme und findet nach einer Hypothese an der Grenze der Atmosphäre in 61404 Meter Höhe die Temperatur — 266½° C.

Im Jahre 1854 und 55 veröffentlichte Biot noch eine Collection von Vorträgen in der Pariser Akademie, hervorgerufen durch Faye, welchem die Theorien von Newton, Laplace und Ivory einen Widerspruch in sich zu haben scheinen und der, um sie zu heben, unter anderm den Vorschlag macht: aus der terrestrischen die astronomische Refraction abzuleiten. Biot zeigt, dass die grossen Unregelmässigkeiten in den Luftschichten in der Nähe der Oberfläche dies nicht zulassen und dass man zur Annahme einer Hypothese über die Wärmeabnahme in der Atmosphäre gezwungen ist. Er kritisirt die Hypothesen von Laplace, Ivory und Bessel und zeigt wie weit sie in physischer Hinsicht mit den Beobachtungen übereinstimmen, er entscheidet sich für die Theorie von Laplace, dessen Formeln den physischen Bedingungen der Atmosphäre so nahe entsprechen.

In den Memoiren der Petersburger Akademie vom Jahre 1860 hat Baeyer noch eine neue Theorie der Strahlenbrechung gegeben. Er setzt die Dichtigkeit der Luft in der Höhe h

$$\varrho = \varrho_0 \frac{(1 + v\,h)^{\varepsilon - 1}}{(1 + w\,h)^{\varepsilon - 1}}$$

wo v und w abhängig von der Höhe der Atmosphäre und andern bekannten Constanten ist. Die Theorie von Lubbock giebt für ε den Werth 4, 26 . . ., Baeyer leitet aus Beobachtungen terrestrischer Objecte $\varepsilon = 4$ ab und zeigt, dass für 80 Grad Zenithdistanz die astronomische Refraction bei $\varepsilon = 4$ und $\varepsilon = 5$ dieselbe bleibt; bei der Horizontalrefraction dagegen ist eine Differenz von 50″. Bei der terrestrischen Refraction werde ich auf die schönen Resultate dieser Arbeit näher eingehen.

§ 15.

Allgemeine Uebersicht über die Theorien von Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock. Welche Constitution der Atmosphäre folgt aus diesen Theorien? welche derselben stimmt am besten mit den Beobachtungen überein?

Die Frage, welche Theorie die beste und daher die anzuwendende sei, veranlasst mich die den einzelnen Theorien zu Grunde liegenden Hypothesen über die Abnahme der Dichtigkeit und über die Abnahme der Temperatur in unserer Atmosphäre zusammen zu stellen. Aber die Frage, welche Theorie die beste sei, kann vielleicht abhängig von der Gegend sein, für welche die Theorie gelten soll. Und daraus entspringt vorher die Frage, ob für unsere Erde ein und dieselbe Theorie, ein und dieselbe Refraction überall anwendbar sei?

Digitized by Google

Die Beobachtungen besonders in der Nähe des Horizontes, die in der kalten und heissen Zone angestellt sind, haben verschiedene Resultate gegeben: im ersten Abschnitt ist einer Beobachtung der Holländer im Jahre 1597 Erwähnung geschehen, wonach die Sonne in hoher nördlicher Breite gesehen worden ist, als sie in Wirklichkeit noch 4¼ Grade unter dem Horizonte war. Bouguer will am Aequator nur eine Horizontalrefraction von 27 Minuten gelten lassen, die aber Humboldt, mit bessern Instrumenten versehen, nicht bestätigt fand. Humboldt beobachtete bei der Besteigung des Chimborasso Barometer und Temperatur und die Daten zeigen eine etwas andere Abnahme der Temperatur als die Beobachtungen von Gay-Lussac und andern in der gemässigten Zone.

Die Hypothesen über Abnahme der Wärme setzen eine regelmässige Abnahme, eine continuirliche Function voraus; am Tage erwärmt aber die Sonne den Erdboden und nach Sonnenuntergang besonders strahlt der Boden Wärme aus, wodurch die Continuität unterbrochen wird und es besonders in der heissen Zone vorkommen kann, dass die Wärme anstatt abzunehmen bis zu einer bestimmten Höhe zunimmt. In der kalten Zone hat besonders im Winter der Erdboden eine sehr geringe Wärme, viele Grade unter Null zeigt das Thermometer, so dass Quecksilberthermometer wegen Erstarrens des Quecksilbers gar nicht brauchbar sind. Jedenfalls wird in dieser Zone die Temperatur nicht ebenso mit der Höhe wie in der heissen Zone abnehmen. Beobachtungen von dort her fehlen leider noch ganz, die aus der heissen Zone sind ebenfalls spärlich und in unserer gemässigten Zone sind sie bis jetzt auch nicht sehr reichlich vorhanden. Biot's Vorschlag durch aufsteigende und wieder zu erlangende Luftballons, welche zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Höhen, vielleicht durch selbstregistrirende Instrumente die Höhe des Barometers und die Temperaturen angäben, die Constitution der Atmosphäre kennen zu lernen, ist noch nicht ausgeführt, ausserdem würden manche Hindernisse sich der Ausführung in den Weg setzen. Sie würden unsre Kenntnisse vermehren, würden aber auch sicher zeigen, dass, wie sich durch die Luftfahrten 1850 und 1852 von Barral und Bixio und Welsh etc. heraus gestellt hat, die Temperaturabnahme nicht gleichförmig ist, dass zwischen warmen Luftschichten noch wärmere oder kältere durch Winde und Wolken eingeschoben sind. Sobald Unregelmässigkeiten in der Temperatur stattfinden, zeigt sich dies in der Refraction und das Schwanken oder Hin- und Herspringen des Sternes am Faden eines Fernrohrs ist ein so bekanntes Phaenomen, dass ich nicht nöthig habe, dies als eine Folge der ungleichen Refraction in der Atmosphäre näher zu erklären.

Diese Unregelmässigkeiten, diese Störungen erfordern um so mehr, dass die Beobachtungen recht zahlreich angestellt werden, um das Gesetz der Wärmeabnahme kennen zu lernen, und da bis jetzt nur vereinzelte Daten vorhanden sind, müssen wir gestehen, dass wir noch nicht wissen, ob die Constitution der Atmosphäre in andern Zonen eine andre ist, als in unserer gemässigten. Ist sie aber in der gemässigten überall dieselbe?

Digitized by Google

Strenge genommen können wir diese Frage auch nicht beantworten; nach unsern Beobachtungen scheint es, — grade die Refraction giebt die Aufschlüsse, — dass die Constitution nicht sehr verschieden sein kann. Die aus zahlreichen Beobachtungen bestimmten Constanten der Refraction sind in Russland, Deutschland, Italien, Frankreich, England, Amerika, am Cap der guten Hoffnung, ja selbst in Ostindien, also in der heissen Zone, nahe gleich gefunden worden und Tafeln, die für Mitteleuropa berechnet sind, zeigen sich überall brauchbar, überall gültig.

Hierbei kommt aber der Umstand in Betracht, dass beträchtliche Aenderungen in der Refraction viel beträchtlichere Aenderungen in der Constitution der Atmosphäre erfordern. Wir haben in § 5 des 2ten Abschnittes gesehen, dass bis etwa 75 ja bis 80° Zenithdistanz die Constitution der Atmosphäre auf die Refraction ohne merklichen Einfluss ist, erst von 80—90 Grad Zenithdistanz zeigt sich die Einwirkung, und wenn eine Hypothese nur einigermaassen den physischen Gesetzen der Atmosphäre genügt, so wird sie bis 85 ja bis 88 Grad Zenithdistanz mit einer andern besser stimmenden fast ganz überein kommen. In einem spätern Werke, in welchem ich Tafeln nach den verschiedenen Theorien mit denselben Constanten berechnet zu geben beabsichtige, werde ich dies durch Zahlen beweisen. Erst ganz in der Nähe des Horizontes weichen die Resultate der verschiedenen Theorien beträchtlich von einander ab. Am Horizonte zu beobachten ist nicht sehr vortheilhaft, grade weil dort die Localeinflüsse, die Ausstrahlung des Erdbodens, wie oben gesagt, beträchtliche Störungen hervorbringen, ausserdem ist selten bei dem jetzigen Bau der Sternwarten, wo die Festigkeit und Stabilität niedrige Gebäude zu bauen vorschreibt, der ganze Horizont sichtbar und es scheint, dass wenn man diejenige Theorie vorzieht, die sich grade der Wärmeabnahme der Gegend, in der man beobachtet, am besten anschliesst, man am richtigsten und vortheilhaftesten wählt.

Um zur andern Frage überzugehen, untersuchen wir bei den Theorien von Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock die daraus folgenden physischen Gesetze der Atmosphäre — die Theorie von Svanberg schliesse ich aus, weil sie nicht die gehörige Bequemlichkeit hat —. Young's Entwicklungen sind auch nur genähert, sein Ausdruck zwischen Druck und Dichtigkeit ist aber so einfach, dass ihn mitzunehmen nicht uninteressant sein wird.

In § 5 haben wir die Gleichungen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots dp = -g_0 \frac{a^2}{r^2} \varrho \, dr$$

aus welchen Gleichungen, sobald eine Relation zwischen ϱ und ϱ_0 oder zwischen r und ϱ gegeben ist, sich zu einem bestimmten r sowohl p, wie auch ϱ und τ finden lässt. Die Formel (1) setzt eine vollkommen trockne Luft voraus; wollte man Rücksicht nehmen auf eine feuchte Luft mit der elastischen Kraft

Digitized by Google

des Wasserdampfs φ in der Entfernung r, mit φ_0 an der Oberfläche der Erde, so würde man haben statt (1)

$$(3) \quad \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p - 100\,m\varphi}{p_0 - 100\,m\varphi_0}$$

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass das in (2) gebrauchte g_0 für verschiedene Breiten wegen der Abplattung der Erde auch verschieden ist.

Nach Laplace ist nach § 5 für 0,76 Millimeter und 0° Temperatur

$$\varrho = \varrho_0 \left\{1 + \frac{f\,u}{m}\right\} e^{-\frac{u}{m}}$$

wo

$$f = + 0{,}49039$$
$$m = 0{,}000741829$$
$$u = 1 - \frac{a}{r} - 0{,}0002939 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \text{ ist.}$$

Dadurch wird

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \left(0{,}59224 + \frac{0{,}29045}{1 + u.661{,}11} + 0{,}11731 \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$$

und wenn man $r - a = 0$, 1600, 3200, 4800 etc., Meter annimmt, erhält man über die Constitution der Atmosphäre folgende Tabelle, wo die erste Columne die Höhe in der Atmosphäre, die 2te den Luftdruck p, die 3te die Dichtigkeit ϱ und die 4te die Temperatur τ enthält.

Tafel I. — Nach Laplace's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,000	0,0 C.
1600 „	0,62 „	0,858	— 13,2 „
3200 „	0,50 „	0,723	— 24,4 „
4800 „	0,40 „	0,601	— 34,1 „
6400 „	0,31 „	0,492	— 41,8 „
8000 „	0,24 „	0,348	— 48,7 „
16000 „	0,06 „	0,118	— 75,6 „
24000 „	0,015 „	0,030	— 80,2 „
32000 „	0,003 „	0,007	— 90,5 „
∞ „	0,000 „	0,000	Unbestimmt

Nach Bessel ist, wenn $\frac{a}{r} = 1 - s$ genannt wird,

$$\varrho = \varrho_0\, e^{-\beta s}$$

wo $\beta = 745{,}75$ [1]) ist; daraus folgt mit Hülfe der Gleichung (2)

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{a}{l} \frac{e^{-\beta s}}{\beta} - \frac{a}{l\beta}$$

l ist die bekannte Grösse, nach Laplace 7974 Meter. Die Rechnung ergiebt:

[1]) β gilt eigentlich für den Normalzustand der Atmosphäre, den Bessel annimmt; für unsern Normalzustand würde der Werth etwas anders sein, doch so unbedeutend, dass ich es hier vernachlässigt habe.

Digitized by Google

Tafel II. — Nach Bessel's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,000	0°,0 C.
1600 „	0,65 „	0,829	— 2,0 „
3200 „	0,54 „	0,688	— 4,5 „
4800 „	0,44 „	0,570	— 8,0 „
6400 „	0,34 „	0,473	— 12,0 „
8000 „	0,26 „	0,392	— 17,0 „
16000 „	0,10 „	0,154	— 52,0 „
24000 „	0,03 „	0,061	— 137,5 „
27782 „	0,00 „	0,035	— 266,7 „

Young's Hypothese setzt voraus:

$$p = \tfrac{2}{3}\,\varrho\,\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\,\varrho^2,$$

daher

$$dp = (\tfrac{9}{4}\,\varrho^{\frac{1}{2}} - \varrho)\,d\varrho = \frac{\varrho}{l}\,d\,\frac{a}{r} \quad \text{nach (2)},$$

woraus durch Integration mit Bestimmung der Constante

$$\frac{a}{r} = \frac{9}{2l}\sqrt{\varrho} - \varrho\,l - \frac{7}{2l} + l \qquad \text{folgt.}$$

Es ergiebt sich durch Rechnung:

Tafel III. — Nach Young's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,00	0° C.
1600 „	0,62 „	0,84	— 13° „
3200 „	0,51 „	0,71	— 23° „
4800 „	0,42 „	0,61	— 33° „
6400 „	0,34 „	0,51	— 42° „
8000 „	0,27 „	0,41	— 48° „
16000 „	0,04 „	0,13	— 140° „
24000 „	0,001 „	0,01	— 225° „
27964 „	0,00 „	0,00	— 267° „

Schmidt hat als Hypothese:

$$\frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} = 1 - \frac{h}{49100}$$

$$= 1 - \frac{h}{b}$$

und nach § 9, Abschnitt II. haben wir

$$\lg \frac{p}{p_0} = \frac{1}{l}\,\frac{1}{1 + m\tau_0}\,\frac{1}{a + 2b}\,\lg \frac{a\,(b - h)}{b\,(a + 2h)}$$

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \lg \frac{p}{p_0} - \lg \left(1 - \frac{h}{b}\right)$$

und damit wird:

Digitized by Google

Tafel IV. — Nach Schmidt's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,000	0° C.
1600 „	0,62 „	0,843	— 8,7 „
3200 „	0,50 „	0,707	— 17,4 „
4800 „	0,40 „	0,588	— 26,1 „
6400 „	0,33 „	0,487	— 34,8 „
8000 „	0,26 „	0,400	— 43,5 „
16000 „	0,07 „	0,132	— 86,9 „
24000 „	0,012 „	0,032	— 130,3 „
32000 „	0,004 „	0,004	— 173,8 „
49100 „	0,000 „	0,000	— 266,7 „

Ivory hat als Hypothese

$$\frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} = 1 - \frac{2}{9}(1 - e^{-u})$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-u}$$

und nach § 11 ist

$$h = \left(\lg \frac{p^0}{p}\right) \frac{p_0}{\varrho_0} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{m(\tau_0 - \tau)}{1 + m\tau_0} - \frac{1 + \frac{4}{81}}{\frac{24}{9}\,\frac{11}{9}} \left\{\frac{m(\tau^0 - \tau)}{(1 + m\tau_0)}\right\}^2 - \ldots\right)$$

$$\lg \frac{p_0}{p} = u + \lg \frac{1 + m\tau_0}{1 + m\tau}$$

Mit diesen Werthen und den Constanten findet sich:

Tafel V. — Nach Ivory's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,000	0° C.
1600 „	0,62 „	0,849	— 8,2 „
3200 „	0,51 „	0,714	— 16,7 „
4800 „	0,41 „	0,595	— 24,0 „
6400 „	0.33 „	0,491	— 29,8 „
8000 „	0,26 „	0,402	— 34,9 „
16000 „	0,08 „	0,134	— 50,6 „
24000 „	0,002 „	0,040	— 56,0 „
32000 „	0,001 „	0,012	— 57,5 „
40000 „	0,0001 „	0,001	— 58,0 „
∞ „	0.0000 „	0,000	— 59,2 „

Lubbock endlich hat nach § 13

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = (1 - q)^3 (1 - Hq)$$

$$\frac{h}{r} = \frac{3l}{H} \lg (1 - Hq)$$

wo $q = 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$, H eine Constante = 0,54378 ist

und es findet sich:

Digitized by Google

Tafel VI. — Nach Lubbock's Hypothese.

Höhe in der Atmosphäre.	Luftdruck.	Dichtigkeit.	Temperatur.
0 Meter	0,76 Meter	1,000	0° C.
1600 „	0,62 „	0,846	— 8,3 „
3200 „	0,51 „	0,713	— 16,1 „
4800 „	0,41 „	0,598	— 24,6 „
6400 „	0,33 „	0,499	— 33.4 „
8000 „	0,26 „	0,414	— 42,5 „
16000 „	0,07 „	0,145	— 93,1 „
24000 ,	0,01 „	0,036	— 153,4 „
35960 „	0,000 „	0,000	— 266,7 „

Vergleichen wir diese Tafeln mit einander, so zeigt sich, dass der Luftdruck bis etwa 8000 Meter hinauf bei allen Hypothesen bis auf 0,03 Meter nahe übereinstimmt. Bei Laplace haben wir gesehen, dass der Luftdruck nach seiner Hypothese zu klein ist, um den Gay-Lussac-schen Beobachtungen in der Höhe von 7000 Metern zu genügen; die übrigen Hypothesen geben grössere Werthe und stimmen daher besser überein. Nicht so ist es mit der Temperatur. Bessel hat in 8000 Meter Höhe etwa 30 Grad Differenz von den übrigen Hypothesen und nach ihm muss man an der Oberfläche der Erde um 800 Meter aufsteigen, um einen Grad weniger an Wärme zu haben. Alle Beobachtungen sowohl in der gemässigten wie in der heissen Zone zeigen, dass eine solche Wärmeabnahme schon bei 160 bis 200 Meter stattfindet. Die Bessel'sche Hypothese ist daher diejenige, welche am wenigsten den physischen Bedingungen genügt; Bessel scheint dies auch selbst anerkannt zu haben, denn von 85 bis 90 Grad Zenithdistanz hat er später auf empirischem Wege die Refractionswerthe bestimmen lassen und diese empirischen Werthe an die Stelle der aus der Theorie abgeleiteten gesetzt, wodurch er seiner Theorie nur bis 85 Grad Zenithdistanz die Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zuerkannte. Bis dahin stimmen aber seine aus der Theorie abgeleiteten Werthe fast vollständig mit den aus andern Theorien folgenden überein.

Welche Theorie verdient nun aber den Vorzug? Eine solche Frage ist leichter aufgestellt, als beantwortet. Die eben gegebenen Tafeln über die Constitution der Atmosphäre unter Voraussetzung der Hypothesen von Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory und Lubbock zeigen, mit Ausnahme der Bessel'schen Hypothese, dass in den Temperaturen sich erst beträchtliche Differenzen zeigen in solchen Höhen, die zu erreichen wohl nie möglich sein wird.

Durch Einfachheit im Gesetze der Wärmeabnahme zeichnet sich besonders die Theorie von Schmidt aus, durch besondere Eleganz der Entwicklung die von Ivory, von welcher die Lubbock'sche als ein Commentar zu betrachten ist. Wenn jemand die rasche Abnahme der Temperatur, die bei Schmidt in grossen Höhen ebenso stattfindet als in geringen Höhen, nicht gelten lassen will, so geben ihm die Theorien von Ivory und Laplace oben

Digitized by Google

eine viel geringere Wärmeabnahme als unten. Die Theorie von Schmidt giebt der Höhe der Atmosphäre nur etwa 6 Meilen, die von Ivory und Laplace sehr viel höher, sodass auch diesen die Höhe der Atmosphäre, welche aus dem Dämmerungsbogen folgt, entspricht. Die Temperatur des Weltraumes folgt nach Schmidt, Lubbock etc. 266⅔ Grad Celsius unter Null, nach Ivory und Laplace findet man sie geringer und würde dadurch den neuesten Resultaten von Pouillet [1]) näher kommen, der sie im Mittel etwa 140 Grad unter Null findet.

Noch andere Hypothesen über die Wärmeabnahme aufzustellen, als bisher vorhanden sind, scheint mir kaum nöthig. Wollte man z. B., um eine Höhe der Atmosphäre von etwa 10 Meilen zu erhalten, anstatt der Schmidt'schen gleichförmigen Temperaturabnahme, wodurch auch bei dem Uebergange von der Atmosphäre in den Weltraum eine Discontinuität entsteht, eine ungleichförmige, aber doch einem einfachen Gesetze folgende Temperaturabnahme so annehmen, dass je höher man steigt die Abnahme der Temperatur immer geringer und dass an der Grenze der Atmosphäre diese Abnahme Null würde, so erhielte man ein Resultat, das fast vollständig mit dem aus der Theorie von Ivory übereinstimmen müsste. Wir haben Theorien genug, und schwerlich wird sich eine Zone auf der Erde finden, wo nicht die eine oder die andere vollständig dem Bedürfniss genügen wird, und dass an verschiedenen Oertern der Erde verschiedene Theorien anwendbar sind, ist nicht unmöglich. Wenn man aber nach den bisherigen Erfahrungen auch noch so genau aus den Beobachtungen die Refraction zu ermitteln sucht, wird man doch nie aus ihr auf die Constitution der Atmosphäre mit Sicherheit schliessen können.

Die gegebenen Theorien und die analytischen Entwicklungen zeigen, dass der jetzige Stand der Mathematik ein solcher ist, um das Problem behandeln zu können. Nachdem Kramp die Bahn gebrochen, haben Laplace, Bessel, Schmidt, Ivory u. A. die Aufgaben, die sie sich stellten, vollständig gelöst, und sobald die Physik ein anderes Gesetz der Wärmeabnahme in der Atmosphäre geben könnte, wäre es leicht in aller Strenge dafür die Refraction abzuleiten.

---

[1]) Pouillet éléments de physique. Tom. II. pag. 716.

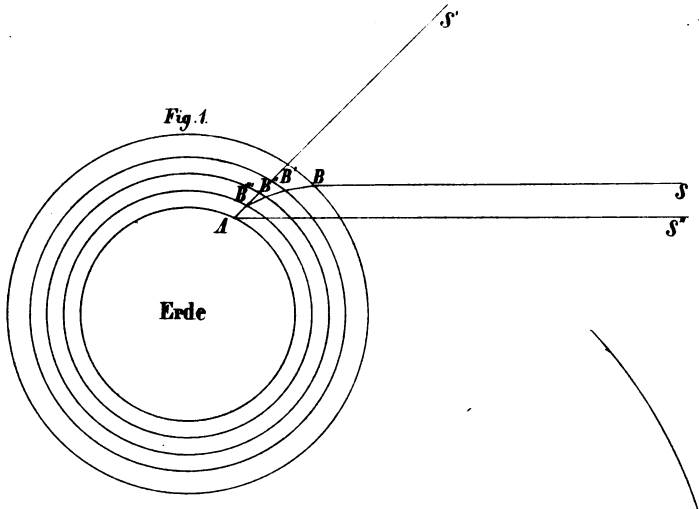
Leipzig, Druck von Giesecke & Devrient.

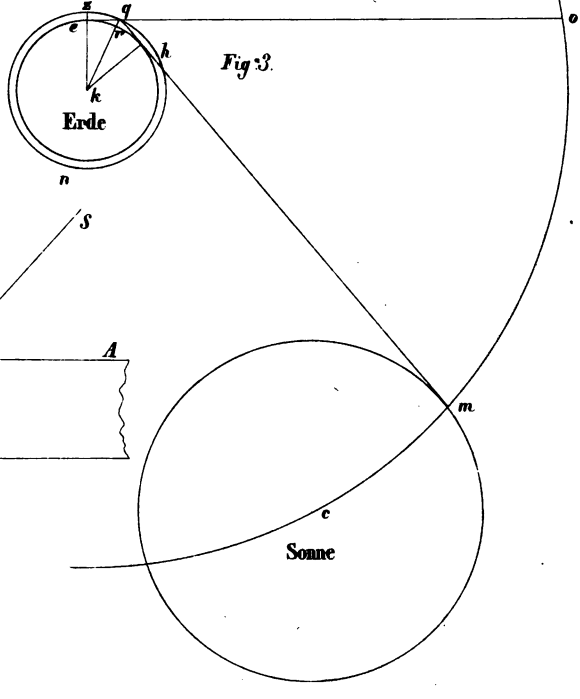
Digitized by Google

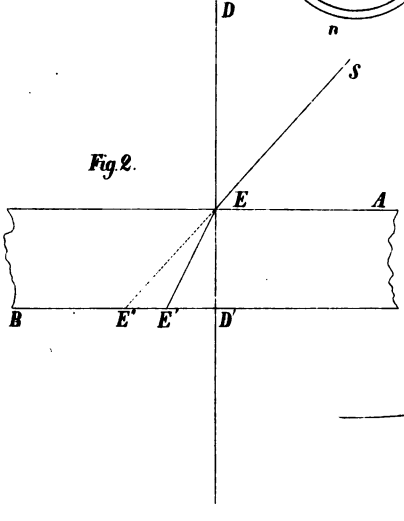
VERBESSERUNGEN.

Pag.	8, 10, 13, 16			lies Vitellio	statt	Vitello.
„	9, Zeile	22	v. ob. lies	haben im	statt	haben nicht im
„	13, „	17	v. u. „	falsch verbessert	„	unverbessert
„	13, „	16 u. 17	v. u.	lies der Fehler der Tyckonischen Parallaxe	statt	die Parallaxe
„	13, „	15	v. u. lies	die obigen Werthe vergrössert hat, so muss dessen	statt	die Refraction vergrössert, so muss deren
„	13, „	10	v. u. „	noch nahe 3′	statt	noch 3′
„	20, „	4	v. u. „	Zembla	„	Sembla
„	21, „	12	v. u. „	Lansberg	„	Landsberger
„	22, „	5	v. u. „	idem	„	idem
„	23, „	21	v. ob. „	Mersennius	„	Marsennius.
„	27, „	2	v. u. „	$y\ \varphi(y)$	„	$y, \varphi(y)$
„	28, „	11	v. u. „	$2\varrho\int\varphi(y)\,dy$	„	$2\varrho\,\varphi(y)\,dy$
„	29, „	10	v. ob. „	$gg\sin^2\emptyset$	„	$gg\cos^2\emptyset$
„	31, „	10	v. u. „	der Luft	„	der Wärme der Luft
„	33, „	11	v. u. „	10 Grad	„	19 Grad
„	42, „	4	v. ob. „	Mayer	„	Meyer
„	51, „	12	v. u. „	$86^0\ 58',5)\}$	„	$86^0\ 58,5)$
„	52, „	22	v. u. „	$B = u$	„	$B = a$
„	54, „	3	v. u. „	$(90 - mR)\}$)	„	$(90 - mR)\}$
„	63, „	15	v. u. „	bedeutend	„	um eine volle Minute
„	64, „	16	v. u. „	dt	„	d
„	76, „	11	v. ob. „	Lansberg	„	Landsberger
„	78, „	12	v. ob. „	Mayer	„	Meyer
„	84, „	5	v. u. „	1827	„	1837
„	85, „	19	v. ob. „	in einem spätern Werke	„	in einem Anhang
„	87, „	1	v. u. „	idem	„	siehe Anhang
„	99, „	9	v. u. „	$e^{-\frac{as'}{l}}$	„	$-\frac{as'}{l}$
„	100, „	8	v. ob. „	$+\frac{\alpha^2 a^2}{1.2.l^2\sin^4 z}$	„	$\frac{\alpha^2 a^2}{1.2.l^2\sin^4 z}$
„	121, „	1	v. ob. „	§ 6	„	§ 9
„	121, „	17	v. ob. „	$\frac{1}{3350}$	„	$\frac{1}{3500}$
„	135, „	9	v. u. „	nach h und τ	„	h nach τ
„	137, „	21	v. ob. „	für	„	wofür
„	142, „	14	v. ob. „	(18) ... $\frac{d(\delta\emptyset)}{M\sqrt{k}}$	„	$\frac{d(\delta\emptyset)}{M\sqrt{k}}$
„	143, „	5	v. u. „	$\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}$	„	$\frac{\sqrt{1-x}}{x^n}$
„	164, „	8	v. ob. „	(10), und	„	(10) und
„	168, „	17	v. ob. „	Beobachter	„	Besbachter
„	169, „	6	v. ob. „	starke Abweichungen davon zeige	statt	stark von der berechneten Höhe abweiche.
„	183, „	1	v. ob. „	selten	statt	wohl nie.

Digitized by Google







Arnst. Anstalt d. Landes Industrie Comptoirs, Weimar

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 4.

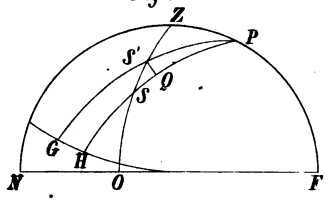


Fig. 7.

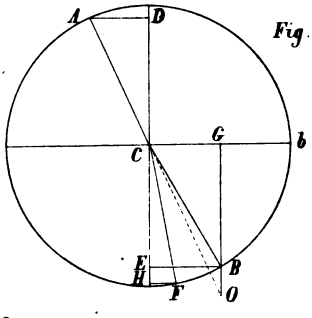


Fig. 5.

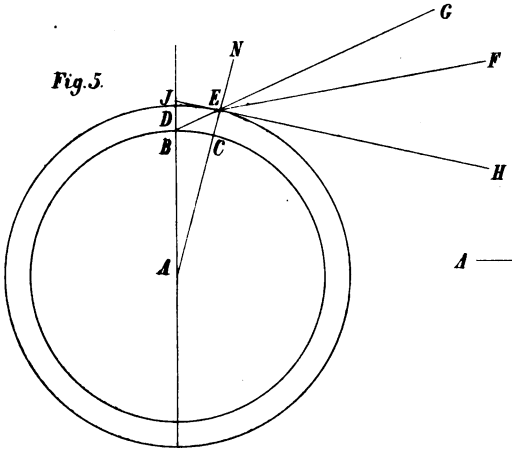


Fig. 8.

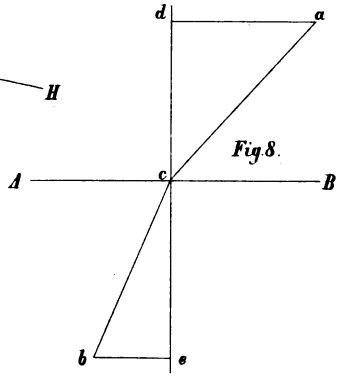


Fig. 6.

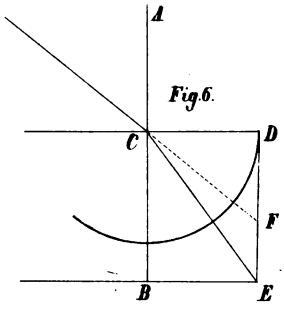
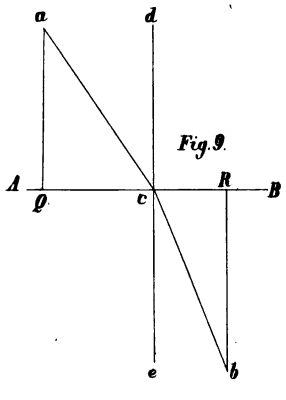


Fig. 9.



Artist. Anstalt d. Landes Industrie Comptoirs, Weimar.

Digitized by Google

Digitized by Google

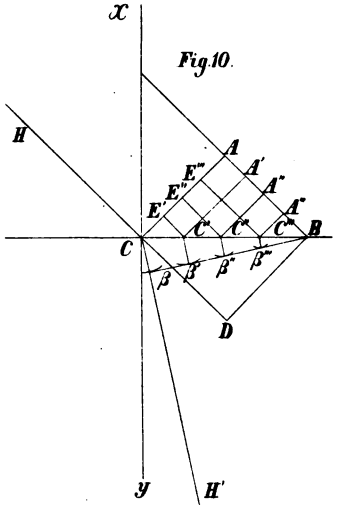


Fig. 10.

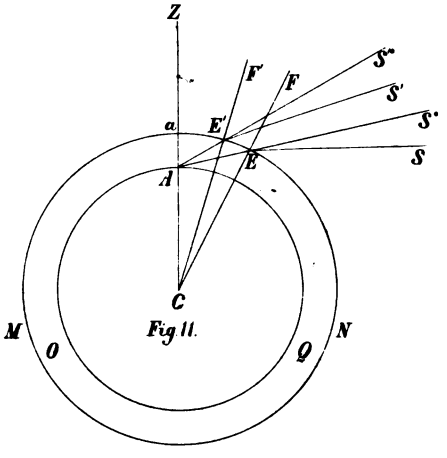


Fig. 11.

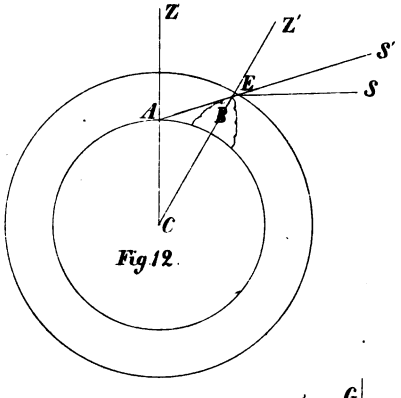


Fig. 12.

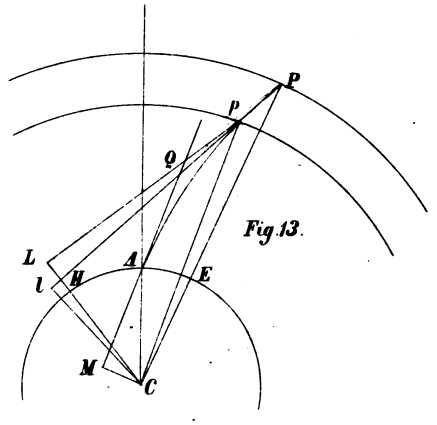


Fig. 13.

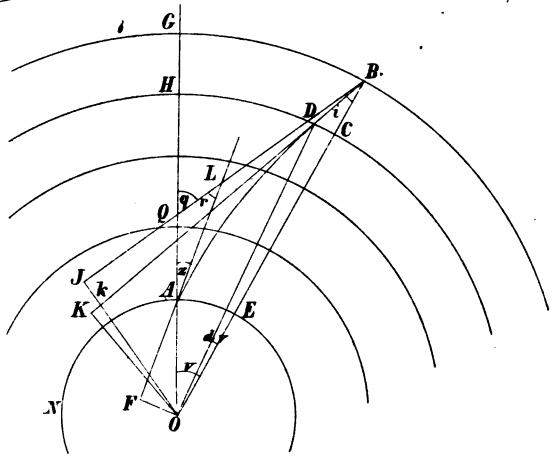


Fig. 14.

Artist. Anstalt d. Landes Industrie Comptoirs, Weimar

Digitized by Google

Digitized by Google

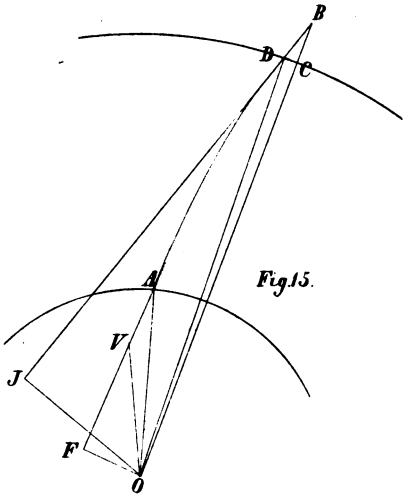


Fig 15.

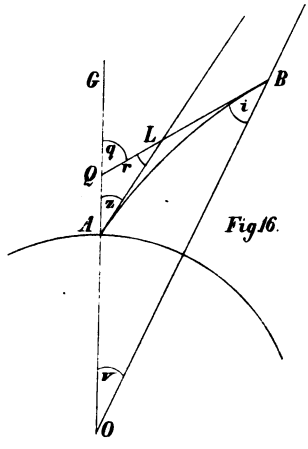
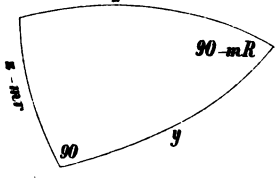


Fig 16.

Fig 17.



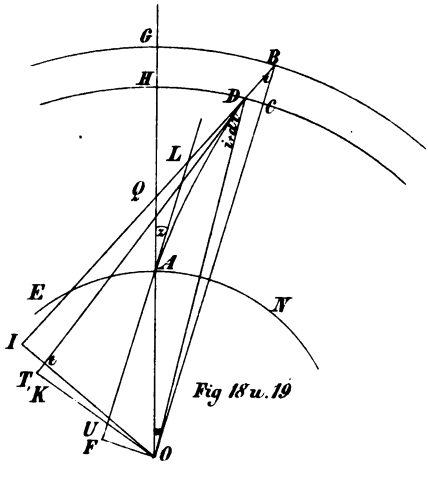


Fig 18 u. 19

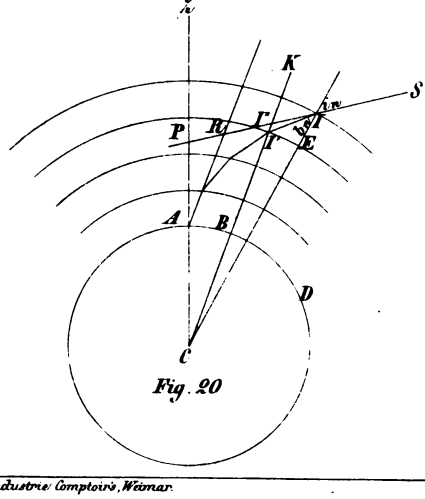


Fig. 20

Artist. Anstalt d. Landes Industrie Comptoirs, Weimar.

Digitized by Google

4696 05

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DATE DUE

SEP 10 2002

GAYLORD PRINTED IN U.S.A.

Digitized by Google

3 2044 029 808 284

JOHN G. WOLBACH LIBRARY
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY
60 Garden Street
Cambridge, Massachusetts 02138

Digitized by Google

32044029808284

Digitized by Google